



Équation des Ondes en Acoustique : Accélération des Potentiels Retardés par la Méthode Multipôle Temporelle

Guillaume Sylvand

► To cite this version:

Guillaume Sylvand. Équation des Ondes en Acoustique : Accélération des Potentiels Retardés par la Méthode Multipôle Temporelle. RR-5017, INRIA. 2003. inria-00071567

HAL Id: inria-00071567

<https://inria.hal.science/inria-00071567>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Équation des Ondes en Acoustique :
Accélération des Potentiels Retardés par la Méthode
Multipôle Temporelle***

Guillaume SYLVAND

N° 5017

Novembre 2003

_____ THÈME 4 _____



***rapport
de recherche***

Équation des Ondes en Acoustique : Accélération des Potentiels Retardés par la Méthode Multipôle Temporelle

Guillaume SYLVAND*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projets Caiman

Rapport de recherche n° 5017 — Novembre 2003 — 67 pages

Résumé : Dans ce rapport, nous présentons l'extension au domaine temporel de la méthode multipôle rapide largement utilisée dans le domaine fréquentiel pour les équations intégrales. On cherche à résoudre l'équation des ondes en acoustique dans le domaine temporel à l'aide d'une formulation intégrale s'appuyant sur un maillage surfacique de l'objet diffractant. On utilise la méthode dite des potentiels retardés qui est connue pour être précise, inconditionnellement stable, mais assez coûteuse. La méthode multipôle rapide temporelle se propose d'accélérer cette formulation par des techniques s'inspirant de la FMM fréquentielle.

Mots-clés : méthode multipôle rapide, domaine temporel, équations intégrales, équation des ondes, acoustique, potentiels retardés

Cette étude a fait l'objet d'un contrat avec EADS CCR, 12 rue Pasteur, 92152 Suresnes Cedex, FRANCE

* CERMICS/INRIA, BP 93, F-06902 Sophia-Antipolis Cedex, guillaume.sylvand@sophia.inria.fr

Wave equation in acoustic : Accelerating the Retarded Potentials using the Time Domaine Multipole Method

Abstract: In this document, we present the extension to the time domain of the fast multipole method widely used in the frequency domain for integral equations. We want to solve the wave equation in acoustic in the time domain using an integral formulation based on a surfacic mesh of the scattering object. We use the retarded potentials method, which is known to be accurate, unconditionally stable but quite expensive. The time domain fast multipole method intends to speed up this formulation with techniques inspired by the frequency domain FMM.

Key-words: fast multipole method, time domain, integral equations, wave equation, acoustic, retarded potentials

Introduction

On s'intéresse à la résolution des équations de l'acoustique dans le domaine temporel via une formulation intégrale basée sur un maillage surfacique de l'objet diffractant. La méthode des potentiels retardés ([17], [10]) utilisée comme point de départ de notre étude présente des propriétés remarquables de précision et de stabilité. En particulier, la méthode numérique (mise en œuvre dans les logiciels industriels d'EADS) est inconditionnellement stable [7], contrairement à ce qui est couramment observé dans ce type de réalisation [13].

Le système linéaire issu de cette mise en équation se résout par une méthode pas à pas en temps impliquant à chaque pas de temps d'une part de calculer l'influence des potentiels surfaciques issus du passé sur la structure, d'autre part d'inverser un système linéaire creux pour aboutir aux potentiels présents. Le premier point est le plus coûteux en terme de temps de calcul. Une idée naturelle pour en accélérer le déroulement serait d'adapter au temporel la méthode multipôle rapide couramment utilisée pour accélérer la résolution des équations intégrales dans le domaine fréquentiel. La méthode PWTD ([14], [4], [15]) est la première application de cette idée.

Nous présentons ici l'adaptation de la méthode multipôle rapide présentée dans [16] à la méthode des potentiels retardés. On espère ainsi combiner le meilleur des deux mondes en joignant à la fois la stabilité inconditionnelle des potentiels retardés et la vitesse de traitement de la méthode multipôle rapide. Ce rapport s'organise en trois parties. Dans un premier temps nous présentons succinctement la méthode des potentiels retardés en acoustique. Dans la seconde partie, nous introduisons la méthode multipôle temporelle adaptée au cas d'un objet rigide. Nous détaillons uniquement les nouveautés par rapport à la FMM fréquentielle, une connaissance de cette dernière est donc souhaitable ([2], [3], [16]). Enfin, nous donnons quelques résultats préliminaires issus du premier prototype d'implémentation de cette méthode.

1 Théorie

1.1 Modélisation mathématique et numérique

1.1.1 Problème

On se donne un objet Ω de frontière absorbante Γ d'impédance η se trouvant dans un fluide (de l'air le plus souvent). On note c la célérité des ondes de pression dans ce fluide, et \vec{n} la normale unitaire sortante en tout point de la frontière Γ de l'objet.

Dans le domaine non borné extérieur Ω^+ , on cherche à résoudre le problème (P^+) suivant : trouver $u^+(x, t)$ tel que

$$(P^+) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^+ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{1}{c\eta} \frac{\partial u^+}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u_{inc}}{\partial n} - \frac{1}{c\eta} \frac{\partial u_{inc}}{\partial t} \right) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u^+(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \frac{\partial u^+}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega^+ \end{array} \right.$$

A ce problème (P^+) , on choisit d'associer le problème (P^-) dans le domaine intérieur Ω^- défini par : trouver $u^-(x,t)$ tel que

$$(P^-) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^- - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2} = 0 & \text{dans } \Omega^- \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u^-}{\partial n} + \frac{1}{c\eta} \frac{\partial u^-}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u_{inc}}{\partial n} + \frac{1}{c\eta} \frac{\partial u_{inc}}{\partial t} \right) & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u^-(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega^- \\ \frac{\partial u^-}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega^- \end{array} \right.$$

On note Φ et p les sauts des traces tangentielles de u et de $\partial u / \partial n$, plus exactement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi(x) = u_{|\Gamma}^-(x) - u_{|\Gamma}^+(x) & x \in \Gamma, \\ p(x) = \left(\frac{\partial u^-}{\partial n} \right)_{|\Gamma}(x) - \left(\frac{\partial u^+}{\partial n} \right)_{|\Gamma}(x) & x \in \Gamma \end{array} \right.$$

On introduit les opérateurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} Sp(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{p(y,t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy, \\ Kp(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{p(y,t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy, \\ K'\Phi(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{\Phi(y,t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy, \\ D\Phi(x,t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \frac{\Phi(y,t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy \end{array} \right. \quad (1)$$

p et Φ sont alors solutions dans $\Gamma \times \mathbb{R}^+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} (Kp - D\Phi) + \frac{1}{2c\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial u_{inc}}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial t} (Sp - K'\Phi) + \frac{c\eta}{2} p = - \frac{\partial u_{inc}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2)$$

En fréquentiel, on opère le changement de variable $\lambda = -p/ik = c.p/(-i\omega)$ afin d'homogénéiser les variables et de symétriser le système. L'opération de division par $-i\omega$ dans le domaine fréquentiel équivaut en temporel à une intégration. Le changement de variable équivalent s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(x,t) = c \int_0^t p(x,\tau) d\tau \\ p(x,t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}(x,t) \end{cases} \quad (3)$$

Comme p et Φ , $\mathcal{P}(x,t)$ est uniformément nulle pour tout $t \leq 0$. Si dans (2) on remplace p par \mathcal{P} , et que l'on multiplie la première équation par $-c$, on obtient :

$$\begin{cases} cD\Phi - K \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = c \frac{\partial u_{inc}}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial t} (S \frac{\partial_t \mathcal{P}}{c} - K' \Phi) + \frac{\eta}{2} \partial_t \mathcal{P} = - \frac{\partial u_{inc}}{\partial t} \end{cases}$$

1.1.2 Formulation faible

Dans cette formulation, $\frac{\partial u_{inc}}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_{inc}}{\partial t}$ sont les données du problème. La première équation est testée avec $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial_t \mathcal{P}(y,t - |x-y|/c)}{4\pi|x-y|} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) dx dy dt \\ & - \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(y,t - \frac{|x-y|}{c}) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) dx dy dt \\ & - c \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} r \vec{\partial}_t \Gamma \Phi(y,t - \frac{|x-y|}{c}) r \vec{\partial}_t \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) dx dy dt \\ & - \frac{1}{2\eta} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) dx dt \\ & = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} c \frac{\partial u_{inc}}{\partial n}(x,t) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

Pour la seconde équation, on utilise la fonction test q , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}(y,t - |x-y|/c) q(x,t) dx dy dt \\ & - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{\Phi(y,t - |x-y|/c)}{4\pi|x-y|} q(x,t) dx dy dt \\ & + \frac{\eta}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \partial_t \mathcal{P}(x,t) q(x,t) dx dt \\ & = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} - \frac{\partial u_{inc}}{\partial t}(x,t) q(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (5)$$

1.1.3 Discrétisation

1.1.3.1 En temps On se donne pour la résolution de ce problème un pas de temps Δt et pour $n \geq 0$ on note $t_n = n\Delta t$. On utilise alors une discrétisation P1 en temps.

Les fonctions de bases sont notées $\gamma^n(t)$ ($n \geq 1$) et sont définies sur la figure 1.

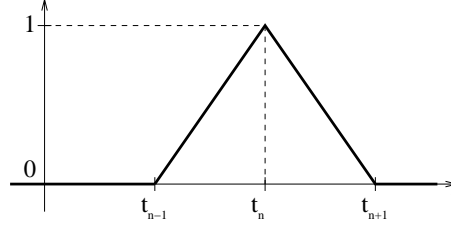


FIG. 1 – Profil de la fonction γ_n

On définit en outre la fonction $\chi_n(t)$ ($n \geq 0$) dont le graphe est représenté figure 2.

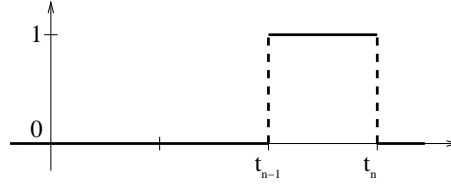


FIG. 2 – Profil de la fonction χ_n

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_n}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [\chi_n - \chi_{n+1}] \\ \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t} [\delta_{t_{n+1}} - 2\delta_{t_n} + \delta_{t_{n-1}}] \end{cases}$$

1.1.3.2 En espace On se propose de résoudre l'équation en espace par une méthode d'éléments finis surfaciques. La surface Γ de l'objet est maillée à l'aide d'une triangulation \mathcal{T}_h comportant N_T éléments triangulaires et N_S sommets. Pour la fonction $\Phi(x, t)$ (qui représente le saut de pression), on utilise une discrétisation P1 en espace. Chaque fonction de base φ_i avec $1 \leq i \leq N_S$ est associée à un sommet S_i (cf. figure 3b), et elle est définie par :

$$\begin{cases} \varphi_i(S_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \varphi_i \text{ est P1 sur chaque triangle} \end{cases}$$

Ainsi, dans un triangle, $\varphi_j(M)$ est la coordonnée barycentrique de M sur le sommet j .

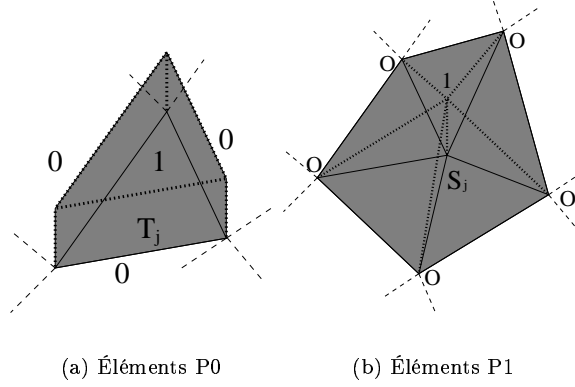


FIG. 3 – Fonctions de base en espace pour l'acoustique

Pour la fonction $p(x,t)$ (qui représente le saut de la dérivée normale de pression), on utilise une discrétisation P_0 sur chaque triangle. Les fonctions de base seront notées p_j avec $1 \leq j \leq N_T$. Ces fonctions sont constantes par triangle, valant 1 sur le triangle T_j et 0 sur tous les autres (cf. figure 3a).

1.1.3.3 Notation On note alors :

$$\begin{cases} \Phi(x,t) = \sum_{1 \leq j \leq N_S} \sum_{m \geq 1} a_j^m \gamma_m(t) \varphi_j(x) \\ \mathcal{P}(x,t) = \sum_{1 \leq j \leq N_T} \sum_{m \geq 1} b_j^m \gamma_m(t) p_j(x) \end{cases}$$

Pour toute date $m \geq 1$, on note A^m et B^m les vecteurs solutions à la date t_m :

$$\begin{cases} A^m = [a_j^m]_{1 \leq j \leq N_S} \\ B^m = [b_j^m]_{1 \leq j \leq N_T} \end{cases}$$

Enfin, on prend pour fonction test les fonctions Ψ et q définies par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \chi_n(t) \varphi_i(x) \\ q(x,t) = \chi_n(t) p_i(x) \end{cases}$$

1.1.4 Cas d'un objet rigide

Plaçons nous dans un premier temps dans le cas d'un objet Ω rigide. Dans ce cas, les termes où \mathcal{P} et η interviennent disparaissent, et le système s'écrit :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \left(y, t - \frac{|x-y|}{c} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} (x, t) \, dx dy dt \\ & -c \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} r \vec{o} t_{\Gamma} \Phi \left(y, t - \frac{|x-y|}{c} \right) r \vec{o} t_{\Gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial t} (x, t) \, dx dy dt \\ & = c \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}}{\partial n} (x, t) \frac{\partial \Psi}{\partial t} (x, t) \, dx dt \end{aligned}$$

Regardons maintenant les différentes matrices intervenant dans ce système linéaire.

1.1.4.1 Matrices du problème Regardons le terme de gauche, en nous restreignant à la fonction de base $\Phi(x, t) = \varphi_j(x) \gamma_n(t)$ et à la fonction test $\partial \Psi / \partial t(x, t) = \varphi_i(x) \chi_m(t)$. On obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \varphi_i(y) \varphi_j(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) \chi_m(t) \, dt \right] dx dy \\ & -c \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} r \vec{o} t_{\Gamma} \varphi_i(y) r \vec{o} t_{\Gamma} \varphi_j(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \gamma_n \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) \chi_m(t) \, dt \right] dx dy \end{aligned}$$

Compte tenu des définitions de γ_n et χ_m , la première intégrale en temps devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial t^2} \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) \chi_m(t) \, dt \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\Delta t} [\delta_{t_{n+1}} - 2\delta_{t_n} + \delta_{t_{n-1}}] \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) \chi_m(t) dt \\ & = \frac{1}{\Delta t} \left[\chi_m \left(t_{n+1} + \frac{|x-y|}{c} \right) - 2\chi_m \left(t_n + \frac{|x-y|}{c} \right) + \chi_m \left(t_{n-1} + \frac{|x-y|}{c} \right) \right] \\ & = \frac{1}{\Delta t} \left[\chi_1 \left(\frac{|x-y|}{c} - t_{m-n-2} \right) - 2\chi_1 \left(\frac{|x-y|}{c} - t_{m-n-1} \right) + \chi_1 \left(\frac{|x-y|}{c} - t_{m-n} \right) \right] \end{aligned}$$

La valeur de cette intégrale ne dépend que de l'écart entre les indices m et n , dans la suite on note donc $k = m - n$. Le terme $\chi_1(|x-y|/c - t_k)$ aura juste pour effet de restreindre l'intégrale sur $\Gamma \times \Gamma$ aux valeurs de x et y vérifiant $|x-y|/c \in [t_k, t_k + \Delta t]$.

La seconde intégrale en temps s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_n \left(t - \frac{|x-y|}{c} \right) \chi_m(t) \, dt = \int_0^{\Delta t} \gamma_1 \left(t + t_k - \frac{|x-y|}{c} \right) dt$$

γ_1 étant non nulle entre 0 et $2\Delta t$, cette intégrale sera non nulle pour toute valeur de $t' = t_k - |x - y|/c$ comprise entre $-\Delta t$ et $2\Delta t$, et elle vaudra :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}(t' + \Delta t)^2 \text{ si } t' \in [-\Delta t, 0] \text{ (figure 4a)} \\ \frac{1}{2\Delta t}((t' + \Delta t)^2 - 3t'^2) \text{ si } t' \in [0, \Delta t] \text{ (figure 4b)} \\ \frac{1}{2\Delta t}(2\Delta t - t')^2 \text{ si } t' \in [\Delta t, 2\Delta t] \text{ (figure 4c)} \end{cases}$$

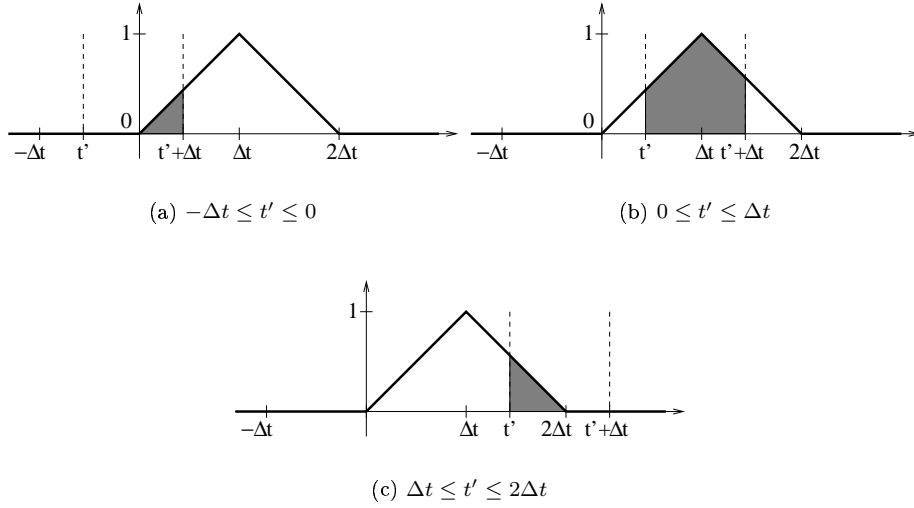


FIG. 4 – Intégrale de γ_1 entre t' et $t' + \Delta t$

Finalement, on obtient que le terme d'interaction entre les fonctions $\varphi_j(x)\gamma_n(t)$ et $\varphi_i(x)\chi_m(t)$ ne dépend que de (i, j) en espace et de $k = m - n$ en temps. On note M^k la matrice de taille $N_S \times N_S$ obtenue. En développant les expressions ci-dessus, on trouve la valeur suivante pour l'élément (i, j) de la matrice M^k :

$$\begin{aligned}
M_{ij}^k = & -\frac{1}{c\Delta t} \left(\iint_{t_k \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_{k+1}} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \right. \\
& -2 \iint_{t_{k-1} \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_k} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \\
& + \iint_{t_{k-2} \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_{k-1}} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \varphi_i(x) \varphi_j(y) dx dy \\
& + \iint_{t_k \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_{k+1}} \frac{r\vec{\otimes}t\varphi_i(x) r\vec{\otimes}t\varphi_j(y)}{4\pi|x-y|} \frac{c^2}{2} \left(t_{k+1} - \frac{|x-y|}{c} \right)^2 \\
& + \iint_{t_{k-1} \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_k} \frac{r\vec{\otimes}t\varphi_i(x) r\vec{\otimes}t\varphi_j(y)}{4\pi|x-y|} \frac{c^2}{2} \left(2\Delta t^2 - \left(t_k - \frac{|x-y|}{c} \right)^2 - \left(t_{k-1} - \frac{|x-y|}{c} \right)^2 \right) \\
& \left. + \iint_{t_{k-2} \leq \frac{|x-y|}{c} \leq t_{k-1}} \frac{r\vec{\otimes}t\varphi_i(x) r\vec{\otimes}t\varphi_j(y)}{4\pi|x-y|} \frac{c^2}{2} \left(t_{k-2} - \frac{|x-y|}{c} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

Si $k < 0$, les domaines d'intégration sont vides et M^k est nulle : cela traduit le fait que la fonction-test $\varphi_i(x)\chi_m(t)$ n'interagit pas avec les fonctions $\varphi_j(x)\gamma_n(t)$ qui lui sont postérieure en temps ($n > m$). C'est une propriété essentielle pour pouvoir résoudre le système, puisqu'elle va permettre d'utiliser un algorithme de résolution pas à pas en temps.

1.1.4.2 Second membre Le second membre s'écrit :

$$L_i^n = c \int_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}}{\partial n}(x, t) \cdot \varphi_i(x) dx dt$$

Dans cette formule, i est un numéro de sommet ($1 \leq i \leq N_S$) et $n \geq 1$ est un pas de temps. Si u_{inc} correspond à une onde plane *arrivant* de la direction \vec{r} (et non se propageant dans la direction \vec{r}), alors il s'écrit $u_{inc}(x, t) = f(t - t_0 + \vec{r} \cdot \vec{Ox}/c)$ où f détermine la forme du signal (gaussien, sinusoïdal, ...) et t_0 ajuste la phase en temps. On a alors :

$$\frac{\partial u_{inc}}{\partial n}(x, t) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u_{inc}(x, t) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} f'(t - t_0 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{Ox}}{c})$$

Par conséquent L_i^n est calculé par :

$$L_i^n = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{r} [u_{inc}(x, t_n) - u_{inc}(x, t_{n-1})] \varphi_i(x) dx$$

1.1.4.3 Système linéaire Avec les notations ainsi définies, le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\sum_{k \geq 0} M^k \cdot A^{n-k} = L^n \quad (6)$$

A chaque pas de temps $n > 0$, on calcule le vecteur A^n à partir du second membre L^n et des vecteurs A^{n-k} avec $k > 0$ obtenus aux pas de temps précédents. A^n s'écrit :

$$A^n = (M^0)^{-1} \left[L^n - \sum_{k>0} M^k . A^{n-k} \right]$$

On distingue trois parties dans cette équation :

- Le terme L^n représente l'onde incidente (ou toute autre donnée) ;
- Le terme $\sum_{k \geq 1} M^k . A^{n-k}$ représente la prise en compte du passé ;
- Le terme $M^0 . A^n$ représente le présent, à calculer donc.

Physiquement, la forme de cette équation s'explique par le fait que ce qui se passe à la date n (*i.e.* A^n) est la conséquence de ce qui s'est passé à la date $n - k$ (*i.e.* A^{n-k}) sur les éléments situés à une distance $k.c.\Delta t$. Mathématiquement, ce lien de causalité est contenu dans les matrices M^k . En effet, M^k représente les interactions entre les éléments situés à une distance $\approx k.c.\Delta t$ l'un de l'autre. On peut en déduire que :

- les (M^k) sont creuses (car pour un élément e_1 donné, les éléments e_2 se trouvant à une distance $k.c.\Delta t$ de e_1 ne constitue qu'une faible portion du maillage) ;
- M^0 est presque diagonale (car elle ne prend en compte les interactions des éléments qu'avec eux-mêmes et éventuellement leurs proches voisins) ;
- Avec une numérotation adaptée, les (M^k) ont un aspect représenté sur la figure 5.

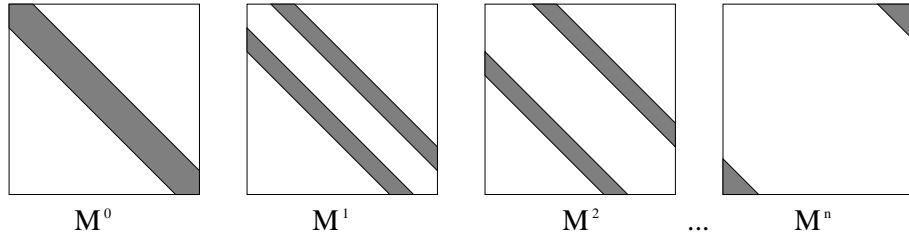


FIG. 5 – Aspect des matrices M^k

Si on note L le diamètre de l'objet (c.à.d $L = \max_{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma} (|x - y|)$), on constate que M^k est nulle dès que $k > 2 + L/c.\Delta t$. En effet, on a alors $t_{k-2} > L/c$. Par conséquent, il n'existe pas de couple (x,y) tel que $|x - y|/c \geq t_{k-2}$. le domaine d'intégration de toutes les intégrales ci-dessus est donc vide. Les informations se déplaçant dans l'espace à la célérité c , ce qui se passe sur Γ à la date t n'influencera plus l'avenir de l'expérience au delà de la date $(t + L/c)$. C'est ce qui explique la nullité des matrices M^k pour k suffisamment grand.

Le système linéaire peut donc s'écrire :

$$\sum_{0 \leq k \leq 2 + L/c.\Delta t} M^k . A^{n-k} = L^n$$

Les principales qualités de cette mise en équation du problème sont :

- Les matrices sont les mêmes à chaque étape.
- Elles sont en nombre fini : elles sont nulles pour $k < 0$ ou $k > 2 + L/c.\Delta t$.
- Elles sont creuses : l'ensemble des M^k représente en terme de stockage l'équivalent d'environ 4 matrices pleines de même dimension.
- La même matrice (M^0) est inversée à chaque étape. De plus, elle est facilement inversible : avec un solveur itératif comme QMR ou GMRES, la convergence est très rapide (quelques dizaines d'itérations pour converger à 10^{-8}).
- Le schéma est inconditionnellement stable

1.1.5 Cas Général

Revenons au cas général d'un objet non rigide régi par le système 4-5. La forme matricielle s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_{k \geq 0} M^k . A^{n-k} + N^k . B^{n-k} = L^n \\ \sum_{k \geq 0} \tilde{M}^k . A^{n-k} + \tilde{N}^k . B^{n-k} = \tilde{L}^n \end{cases}$$

qui peut également s'écrire :

$$\sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} M^k & N^k \\ \tilde{M}^k & \tilde{N}^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{n-k} \\ B^{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^n \\ \tilde{L}^n \end{bmatrix}$$

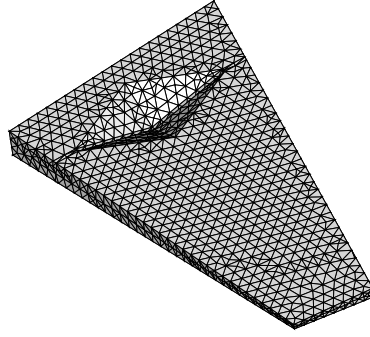
Ce système linéaire dispose des mêmes propriétés et se résout de la même manière que (6).

1.2 Exemple d'applications

Nous présentons dans cette section un exemple d'application de la méthode des potentiels retardés. On s'intéresse à l'action d'une onde plane acoustique sur un objet rigide appelé Cetaf et représenté sur la figure 6. Le Cetaf est un cas de calcul réputé difficile pour les calculs de diffraction. Il a une forme trapézoïdale et est traversé par une fente. Les faces opposées ne sont jamais parallèles.

L'objet mesure 50 cm de long, 30 cm de large et 5 cm d'épaisseur. Le maillage comporte 1797 sommets pour 3594 triangles. Les arêtes mesurent 1,27 cm de moyenne avec des valeurs extrêmes de 1,87 cm et 0,23 cm. La fente elle-même a une largeur de 0,5 cm. Sur ce jeu de données, on ne considérera que des fréquences inférieures à 3000 Hz, c'est-à-dire des longueurs d'onde supérieures à 11,3 cm (correspondant à 8,9 fois l'arête moyenne et 6 fois l'arête maximale).

On se propose de comparer les résultats des codes d'équation intégrale acoustique temporels et fréquentiels. Le code temporel est lancé sur 5000 pas de temps. Avec un nombre

FIG. 6 – *Le Cetaf*

de CFL de 0,5, le pas de temps Δt est de $1,87 \cdot 10^{-5}$ secondes, ce qui donne un $c\Delta t$ de 6,3 mm. Le système linéaire à résoudre comporte alors 84 matrices non nulles, ce qui signifie qu'il faut 84 pas de temps à une onde acoustique pour se propager entre les deux extrémités de l'objet. La durée de notre simulation (5000 pas de temps) représente environ 30 fois le temps nécessaire aux ondes pour faire un aller-retour entre les deux points les plus éloignés du Cetaf.

L'excitation est une onde plane dont le profil est une dérivée de gaussienne de fréquence maximale $f = 3000 \text{ Hz}$. À l'issue de ce calcul, on passe dans le domaine fréquentiel via une FFT sur les valeurs des degrés de liberté. On ne conserve que les fréquences inférieures à 3000 Hz (on en compte 281). On utilise alors le code fréquentiel pour réaliser le même calcul à chacune de ces fréquences (sauf la fréquence nulle), et on compare les résultats.

Sur un PC à 2GHz, le calcul fréquentiel pour 280 fréquences comprises entre 10 et 3000 Hz a duré environ 10,5 heures. On a utilisé un solveur itératif GMRES avec restart infini et convergence à 10^{-3} . En moyenne, chaque résolution a nécessité 77 itérations. Pour ces dernières, on a utilisé un produit matrice-vecteur multipôle aux fréquences le permettant (la taille des domaines de la FMM étant fixée par la longueur d'onde, à basse fréquence toutes les interactions sont proches, ce qui revient alors à utiliser un produit matrice-vecteur plein classique). Sur la même machine, le calcul temporel à 5000 pas de temps dure 3,4 heures dont 2,2 heures pour l'assemblage des matrices.

La figure 7 donne l'écart relatif entre les vecteurs solutions des calculs fréquentsiels et temporels en fonction de la fréquence. À quelques exceptions près, l'erreur reste inférieure à 10 %. Toutefois, on voit de fortes variations en fonction de la fréquence, en particulier en dessous de 1000 Hz. A priori, le solveur itératif utilisé dans le cas fréquentiel (GMRES à 10^{-3} et FMM) n'est pas en cause. Nous avons refait le calcul en fréquence avec un solveur direct pour certains cas difficiles et obtenu le même résultat. Une première explication serait qu'à certaines fréquences le résultat du calcul soit très sensible à la méthode numérique employée (choix des quadratures de gauss, formules analytiques). Une autre possibilité serait de dire

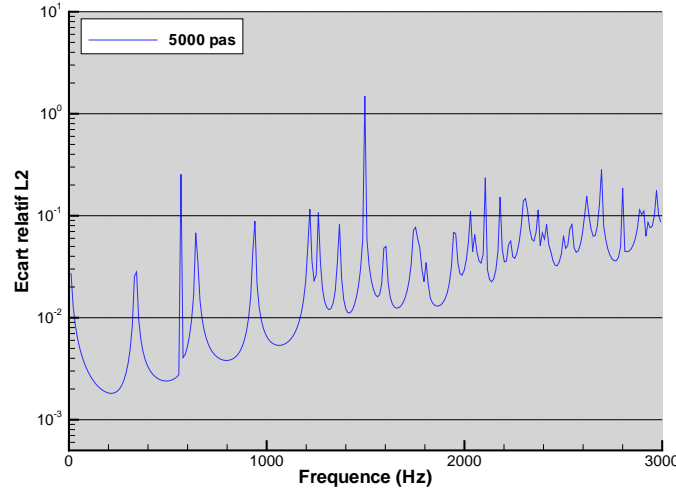


FIG. 7 – Écart relatif en fonction de la fréquence (calcul à 5000 pas de temps)

qu'après 5000 pas de temps certaines fréquences n'ont pas encore totalement re-rayonné et sont encore « piégées » dans l'objet. Pour tester cette hypothèse, nous avons relancé le même calcul pour 1250, 2500, 10000 et 20000 pas de temps afin de voir l'influence de la durée de la simulation sur la précision du résultat en fréquence.

Sur la figure 8, nous reproduisons les courbes correspondants aux 5 calculs réalisés (pour 1250, 2500, 5000, 10000 et 20000 pas de temps). Les courbes étant très proches, le graphique est un peu confus. On peut néanmoins voir que les pics existant sur la figure 7 sont toujours présents, l'augmentation du nombre de pas de temps permet juste de les rendre plus fins (du fait de l'augmentation du nombre de fréquences calculées). Les seules différences notables entre les courbes apparaissent à basse fréquence entre 0 et 300 Hz, où les longues simulations donnent des résultats plus précis. Mais dans cette zone, même les simulations courtes sont précises, avec une erreur déjà satisfaisante (inférieure au pour-cent). Sur la figure 9, on compare uniquement les simulations à 1250 et 20000 pas de temps. On vérifie que globalement le passage à 20000 pas de temps n'améliore le résultat que dans la zone basse fréquence où celui-ci est de toutes façons déjà correct. Autrement dit, sur ce cas précis, une simulation à 1250 pas de temps (soit environ 15 fois le nombre de matrices non-nulles) est suffisante.

Néanmoins, on peut être surpris de l'écart de plusieurs pour-cents qui persiste entre nos deux calculs pour toutes les fréquences comprises entre 1200 et 3000 Hz. Nous avons refait la même simulation en divisant le nombre de CFL par 2 (soit 0,25 au lieu de 0,5), et en multipliant le nombre de pas de temps par deux (ce qui préserve la durée de simulation en secondes). Le $c\Delta t$ (qui est la distance parcourue par les ondes durant un pas de temps) est désormais de 3,2 mm, ce qui est inférieur à la largeur de la fente. Les résultats sont tracés

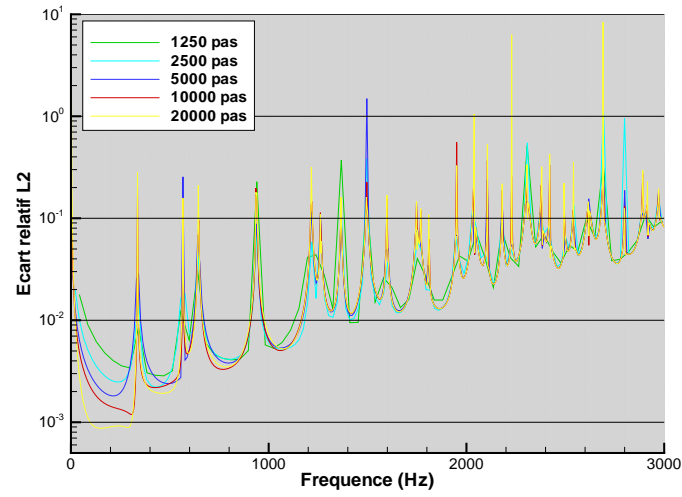


FIG. 8 – Écart relatif en fonction de la fréquence (calculs avec entre 1250 à 20000 pas de temps)

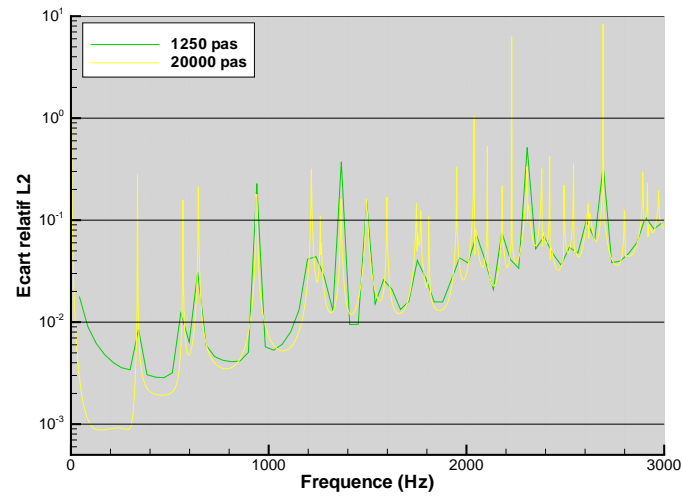


FIG. 9 – Écart relatif en fonction de la fréquence (calculs avec 1250 et 20000 pas de temps)

sur la figure 10. On voit une nette amélioration de la précision du calcul, avec une erreur relative inférieure à 3 % sauf à quelques fréquences où apparaissent des pics.

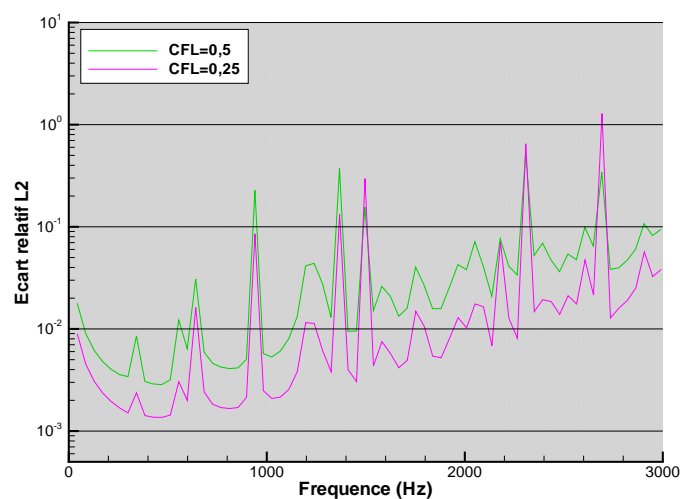


FIG. 10 – Écart relatif en fonction de la fréquence (calculs avec CFL 0,5 et 0,25)

2 Présentation de la méthode multipôle temporelle

Dans cette section, nous allons présenter la méthode multipôle rapide adaptée à la formulation en potentiels retardés dans le cas d'un objet rigide. Une bonne connaissance préalable des notions et du vocabulaire utilisés dans le cadre de la FMM fréquentielle ([16]) semble souhaitable.

2.1 Principe de base

Dans le cas d'un objet rigide, seules restent la variable $\Phi(x, t)$ et la fonction-test $\partial_t \Psi(x, t)$. Le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \left(y, t - \frac{|x-y|}{c} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) \, dx dy dt \\ & - c \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} r \vec{\otimes}_\Gamma \Phi \left(y, t - \frac{|x-y|}{c} \right) r \vec{\otimes}_\Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) \, dx dy dt \\ & = c \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{inc}}{\partial n}(x, t) \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) \, dx dt \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cela donne :

$$\sum_{0 \leq k \leq k_{max}} M^k \cdot A^{n-k} = L^n \quad (7)$$

Rappelons que les M^k sont les matrices du problème (M^k représente l'interaction de points de la surface Γ séparés par une distance comprise entre $(k-2)c\Delta t$ et $(k+1)c\Delta t$). Les L^n sont les données incidentes (ondes planes ou sphériques, générateurs, ...) à la date $t_n = n\Delta t$. Enfin, A^j est la solution du problème à la date $t_j = j\Delta t$. La méthode usuelle pour résoudre ce système est la résolution pas-à-pas en temps : on suppose avoir résolu le système (7) pour toutes les dates t_k avec $k < n$. Pour résoudre le problème à la date t_n , on calcule alors :

- Le second membre L^n ;
- L'influence du passé (qui est soustraite de L^n) : $L^n \leftarrow L^n - \sum_{0 < k \leq k_{max}} M^k \cdot A^{n-k}$ (noter qu'on ne prend pas $k = 0$ dans cette somme) ;
- La solution A^n à la date t_n , en résolvant $M^0 \cdot A^n = L^n$.

Dans cette approche, on raisonne en considérant l'influence du passé sur le présent. L'action de A^{n-k} sur Γ à la date t_n n'est évaluée qu'au moment du calcul de A^n . On pourrait raisonner dans l'autre sens en considérant l'influence du présent sur le futur. Autrement dit, dès qu'on a calculé un vecteur A^n , on calcule son action sur la structure aux dates à venir $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k_{max}}$. Dans cette approche, les données incidentes L^n sont pré-calculées pour tous les pas de temps. Ensuite, à chaque pas de temps t_n , on calcule :

- La solution A^n , en résolvant $M^0 \cdot A^n = L^n$.

– L'action de A^n sur le futur : pour tout $k > 0$, $L^{n+k} \leftarrow L^{n+k} - M^k.A^n$.

C'est cette deuxième étape que la méthode multipôle temporelle se propose d'accélérer. On se donne donc une fonction $\Phi(x, t)$ (définie par la donnée de A^n), et pour toute fonction-test $\partial\Psi/\partial t(x, t) = \varphi_i(x)\chi_m(t)$ postérieure en temps ($m > n$) on cherche à calculer :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\vec{n}(x) \cdot \vec{n}(y)}{4\pi|x-y|} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(y, t - \frac{|x-y|}{c}) \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt \\ & -c \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{1}{4\pi|x-y|} r \vec{\otimes} t_\Gamma \Phi(y, t - \frac{|x-y|}{c}) r \vec{\otimes} t_\Gamma \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt \end{aligned} \quad (8)$$

On peut rapprocher cette mise en équation de celle faite avec la méthode multipôle rapide fréquentielle qui permet de réaliser de manière économique des produits matrice-vecteur. On se donne alors un vecteur $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ représentant la fonction $\vec{t}(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i \cdot \vec{\varphi}_i(x)$, et on cherche à calculer le produit $A.t$ dont la j -ième coordonnée s'écrit :

$$(A.t)_j = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(|y-x|) \left(\vec{t}(x) \cdot \vec{\varphi}_j(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_\Gamma \vec{t}(x) \cdot \text{div}_\Gamma \vec{\varphi}_j(y) \right) dx dy$$

Le calcul du produit matrice-vecteur dans le cas fréquentiel est remplacé par celui du produit (8), mais dans les deux cas il s'agit de faire rayonner une donnée surfacique (saut de pression $\Phi(x, t)$ ou courant $\vec{t}(x)$) afin de calculer son action sur la structure Γ .

2.2 Simplification des termes matriciels

Nous allons tenter de simplifier la forme de l'expression (8) que l'on cherche à calculer. Pour cela, il faut se souvenir que ce terme est égal à $cD\Phi$, où l'opérateur D est défini par :

$$D\Phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \frac{\Phi(y, t - |x-y|/c)}{|x-y|} dy$$

En pratique, $cD\Phi$ est calculé sous la forme (8) pour ôter les singularités. Mais dans le cadre de notre méthode temporelle, qui ne s'intéressera qu'aux interactions suffisamment lointaines, ces problèmes ne nous concernent pas. On se ramène donc à calculer :

$$c \int_{t \in \mathbb{R}} \oint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \frac{\Phi(y, t - |x-y|/c)}{4\pi|x-y|} \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt \quad (9)$$

On introduit le noyau de Green de notre équation :

$$G(R, t) = \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R} \quad (10)$$

C'est bien sûr la transformée de Fourier du noyau de Green du problème fréquentiel correspondante (à savoir $e^{ikR}/4\pi R$). (9) peut également s'écrire comme un produit de convolution en temps (noté $*$ dans la suite) :

$$c \int_{t \in \mathbb{R}} \oint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(|x-y|, t) * \Phi(y, t) \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt$$

Ultime simplification, nous allons ôter les dérivées normales. Nous verrons par la suite (section 2.9.3) qu'il est très simple de les réintroduire. On se ramène donc à devoir calculer :

$$c \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\Gamma \times \Gamma} G(|x - y|, t) * \Phi(y, t) \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt \quad (11)$$

2.3 Décomposition du noyau

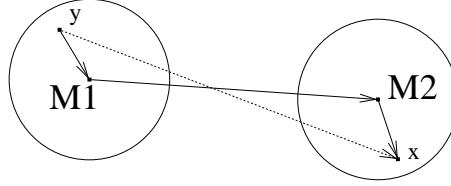


FIG. 11 – *Configuration type*

Comme dans le cas fréquentiel, on cherche maintenant à décomposer le noyau de Green dans une configuration proche de celle de la figure 11. On désigne par \mathcal{S} la sphère unité de \mathbb{R}^3 et par \vec{s} un point générique de \mathcal{S} . On note $\vec{R} = \vec{y}\vec{x}$. De manière formelle, regardons l'opérateur :

$$\tilde{G}(R, t) = -\frac{1}{8\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{R}}{c}\right) d\vec{s}$$

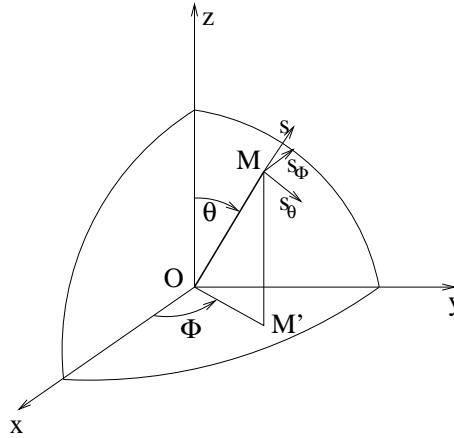


FIG. 12 – *Coordonnées sphériques sur la sphère unité \mathcal{S}*

On choisit sur la sphère unité \mathcal{S} un repère orthonormal tel que l'axe (Oz) soit dirigé selon \vec{R} . On a alors $\vec{s} \cdot \vec{R} = R \cos \theta$. On pose $\tau = R \cos \theta / c$. Notre opérateur \tilde{G} peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(R, t) &= -\frac{1}{8\pi^2 c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \delta\left(t - \frac{R \cos \theta}{c}\right) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta=0}^{\pi} \delta\left(t - \frac{R \cos \theta}{c}\right) \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau=-R/c}^{R/c} \delta(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi R} \left(\delta\left(t - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{R}{c}\right) \right) \end{aligned}$$

Le premier terme est exactement le noyau de Green tel qu'il est défini par l'équation (10). Le second terme est un terme parasite anti-causal. En effet, si on calcule (11) en remplaçant G par \tilde{G} , nous allons obtenir :

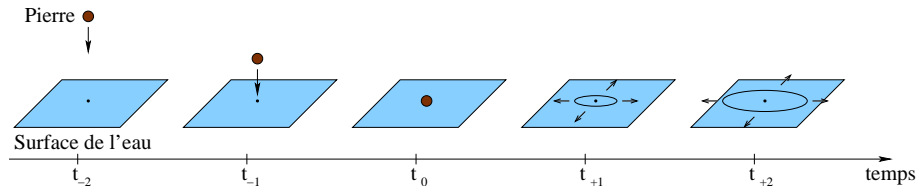
- d'une part le terme habituel en $\Phi(y, t - |x - y|/c) \varphi_i(x) \chi_m(t)$ (traduisant le fait que ce qui se passe à l'instant t au point x est conditionné par ce qui s'est passé au point y à la date $t - |x - y|/c$).
- d'autre part un terme en $\Phi(y, t + |x - y|/c) \varphi_i(x) \chi_m(t)$ dans lequel ce qui se passe à l'instant t au point x est conditionné par ce qui va se passer au point y à la date (à venir) $t + |x - y|/c$. Cela n'a bien sûr pas de sens physique.

La figure 13 tente d'illustrer la signification physique de ces deux termes dans le cas plus simple d'une pierre tombant dans l'eau. L'évènement à l'origine des ondes n'est plus la présence d'un potentiel sur Γ mais l'impact de la pierre à la surface de l'eau. Avec le noyau « réel » $\delta(t - R/c)/4\pi R$, l'influence de cet évènement sur l'univers se propage sur un front sphérique qui naît à la date de l'évènement $t = t_0$ à l'endroit de l'évènement, et dont le rayon croît comme $R = c(t - t_0)$ (figure 13a). Avec le noyau « parasite » $\delta(t + R/c)/4\pi R$, le front sphérique précède l'évènement, son rayon décroît $R = c(t_0 - t)$, et il disparaît à la date de l'évènement $t = t_0$ à l'endroit de l'évènement (figure 13b). La littérature désigne généralement cette onde anti-causale par l'expression « signal fantôme ». Si les deux signaux sont présents en même temps, le front d'onde converge vers l'évènement avant celui-ci puis semble rebondir et repart vers l'infini après t_0 (figure 13c).

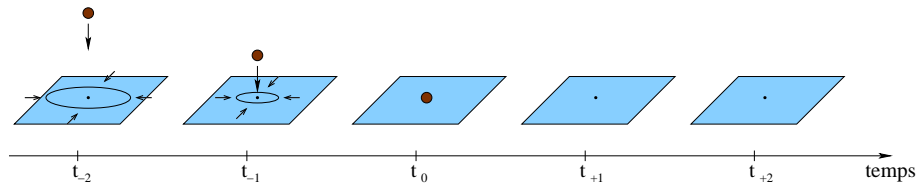
Nous verrons toutefois que ça n'est pas un problème et qu'il est aisé de supprimer ce signal fantôme en prenant soin d'imposer des clauses de causalité dans notre algorithme (section 2.9.1). Gardant cela à l'esprit, on remplace le noyau G par \tilde{G} dans notre étude.

Avec les notations de la figure 11, on a :

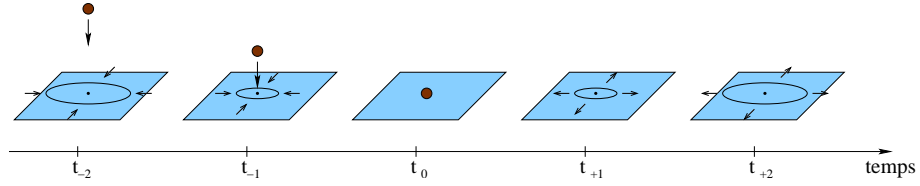
$$\vec{R} = \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{yM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2x}$$



(a) Signal réel : l'impact a lieu à $t = t_0$, et le front d'onde suit l'évènement



(b) Signal fantôme : le front d'onde précède l'évènement



(c) Signal réel + fantôme : le front d'onde semble « rebondir » sur l'évènement à $t = t_0$

FIG. 13 – *Signal réel et signal fantôme : Illustration dans le cas d'une pierre tombant dans l'eau*

Sachant que $\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$, on peut faire apparaître cette décomposition de \tilde{R} directement dans \tilde{G} . Ainsi, le noyau modifié \tilde{G} se décompose sous la forme de produits de convolution en temps :

$$\tilde{G}(R,t) = -\frac{1}{8\pi^2 c} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}_2 x}{c}\right) * \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}_1 \vec{M}_2}{c}\right) * \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}_1}{c}\right) d\vec{s} \quad (12)$$

Pour des raisons qui s'éclairciront plus loin, on fait porter la dérivée en temps au terme en $\vec{M}_2 x$ (rappelons que dans un produit de convolution, la dérivée du produit s'obtient en dérivant un seul des termes du produit).

2.4 Découpage en domaine

Afin de retrouver les points x et y de l'équation (11) dans une configuration proche de celle de la figure 11, on va procéder au découpage de la surface de l'objet traité Γ en sous-domaines de tailles homogènes. Pour cela, on conçoit une grille 3D cubique de pas a englobant Ω (figure 14), chaque intersection non vide d'un cube de la grille et de la surface Γ constitue un sous-domaine de notre découpage. Le choix de a sera explicité dans la suite (section 2.9.1 notamment).

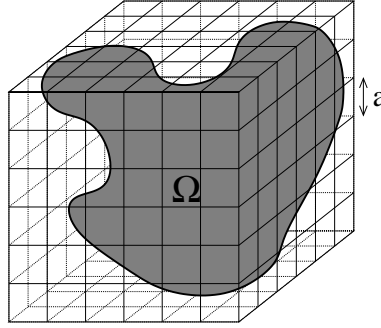


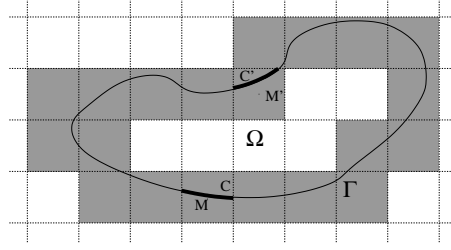
FIG. 14 – Découpage de Γ avec une grille 3D d'arête a

L'équivalent 2D de ce partitionnement est représenté sur la figure 15. Les cellules ayant une intersection non vide avec Γ sont grisées.

2.5 Interaction entre deux sous-domaines

On se donne deux cellules \mathcal{C} et \mathcal{C}' de notre grille, de centres respectifs M et M' , et on cherche à calculer le terme d'interaction entre deux sous-domaines $\Gamma \cap \mathcal{C}$ et $\Gamma \cap \mathcal{C}'$, à savoir :

$$c \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \tilde{G}(|x-y|, t) * \Phi(y, t) \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dy dt$$

FIG. 15 – Découpage de Γ en sous-domaine (version 2D)

En utilisant la décomposition du noyau (12), ce terme peut s'écrire :

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) * \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}\vec{M}'}{c}) * \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y\vec{M}}{c}) \\ * \Phi(y, t) \varphi_i(x) \chi_m(t) dx dy dt d\vec{s}$$

Réordonnons les intégrales :

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) \\ * \left[\delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}\vec{M}'}{c}) * \left(\int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y\vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) \right) \right] \\ \varphi_i(x) \chi_m(t) dx dy dt d\vec{s} \quad (13)$$

A l'image de la FMM fréquentielle, on voit apparaître trois phases dans le calcul de cette formule :

Initialisation : on calcule la fonction de radiation $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ définie sur la sphère unité \mathcal{S} par :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y\vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) dy \quad (14)$$

\mathcal{F}_C ne dépend que de Φ , de la cellule \mathcal{C} et de son centre M . Elle représente l'influence du domaine $\Gamma \cap \mathcal{C}$ sur l'extérieur.

Transfert : on convolve la fonction \mathcal{F}_C par la fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}$ qui dépend elle aussi de $\vec{s} \in \mathcal{S}$ et de t :

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}\vec{M}'}{c}) \quad (15)$$

Le produit résultant est toujours une fonction définie sur \mathcal{S} , elle représente l'action de la fonction Φ portée par $\Gamma \cap \mathcal{C}$ au point M' de l'espace.

Intégration : on termine le calcul en intégrant le résultat du transfert à la fois sur \mathcal{S} , sur le temps t , et sur $\Gamma \cap \mathcal{C}'$:

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) * T_{M\vec{M}'}(\vec{s}) * \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}, t) \right] \varphi_i(x) \chi_m(t) dx dt d\vec{s}$$

2.6 Discrétisation de la sphère unité

L'algorithme présenté à la section 2.5 conduit à manipuler des fonctions définies sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 notée \mathcal{S} et qui dépendent également du temps. Nous allons voir comment représenter ces fonctions sur \mathcal{S} . Reprenons l'équation (13) en notant

$$g(x, \vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) * \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) dy$$

(13) devient :

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{x \in \Gamma \cap \mathcal{C}'} g(x, \vec{s}, t) * \frac{\partial}{\partial t} T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) \varphi_i(x) \chi_m(t) dx dy dt d\vec{s} \quad (16)$$

Pour un point x fixé, $g(x, \vec{s}, t)$ peut être vu comme la fonction de radiation d'un domaine de rayon double du rayon de \mathcal{C} . En outre, c'est une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ qui peut donc se décomposer sur la base des harmoniques sphériques $(Y_{l,m})$ avec $l \geq 0$ et $-l \leq m \leq l$. De nombreuses études ont concerné la largeur de bande d'une telle fonction sur la base des harmoniques sphériques c'est-à-dire la borne supérieure que l'on peut imposer à l'indice l pour avoir une représentation convenable de g ([1]). Les fonctions de potentiel du calcul ont initialement une pulsation maximale ω_{max} , mais pour une raison liée à la construction de $\Phi(y, t)$ (qui s'éclaircira dans la section 2.7) nous allons considérer que la fonction source a une pulsation maximale différente, notée ω_s . Nous allons alors reprendre le résultat proposé par [3] et déjà utilisé dans [16] à savoir : la fonction g a une largeur de bande L donnée par :

$$L = k_s d + C_\varepsilon \cdot \log_{10}(k_s d + \pi) \quad (17)$$

avec les notations :

- d est le diamètre de \mathcal{C} soit ici $d = \sqrt{3}a$ (où a est l'arête de \mathcal{C}).
- k_s est le nombre d'onde associé à la fréquence maximale qui nous concerne.
- C_ε est un paramètre fixant la précision. Dans [16], on peut voir que $C_\varepsilon = 7$ donne de bons résultats dans le cas fréquentiel. Nous prendrons donc cette valeur dans un premier temps.

La fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}$ se projette elle aussi sur la même base $(Y_{l,m})$. Mais dans (16), du fait de l'orthonormalité des harmoniques sphériques, la partie de $T_{M\vec{M}'}$ issue

d'harmoniques $(Y_{l,m})$ de rang $l > L$ ne contribue pas au résultat final. On peut donc tronquer $T_{M\bar{M}'}$ (section 2.8.2.1) et se ramener au cas d'une fonction de largeur de bande L tout comme g . Ainsi, le produit est de largeur de bande $2L$.

En résumé, du point de vue spatial (c'est-à-dire par rapport à la variable $\vec{s} \in \mathcal{S}$), nous admettrons donc que toutes les fonctions que nous allons intégrer sont à largeur de bande limitée $2L$ de la forme :

$$\sum_{\substack{-l \leq m \leq l \\ 0 \leq l \leq 2L}} A_{l,m} Y_{l,m}(\vec{s})$$

De ce fait, nous allons reprendre la discrétisation de la sphère unité utilisée dans la méthode multipôle fréquentielle, à savoir une grille (θ_i, ϕ_j) à $(L+1)(2L+1)$ points, où les θ_i sont les points d'intégration de Gauss-Legendre, et les ϕ_j sont équirépartis (voir [16]). Il est important de souligner que cette formule d'intégration est exacte pour toutes les harmoniques sphériques de rang $\leq 2L$, et devient fausse au-delà : l'intégration d'une fonction \mathcal{F} de $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ dont la largeur de bande serait supérieure à $2L$ ne donnerait pas comme résultat l'intégrale de la restriction de \mathcal{F} à l'espace engendré par $(Y_{l,m})_{0 \leq l \leq 2L}$. Le résultat serait tout simplement faux. Si on utilise une intégration exacte sur la sphère unité comme dans l'équation (16), on *peut* tronquer la fonction de transfert $T_{M\bar{M}'}$ car les termes supplémentaires ne contribuent pas à la valeur de l'intégrale. En revanche, une fois que l'on a discrétisé la sphère unité et remplacé l'intégrale exacte par une somme discrète sur la grille (θ_i, ϕ_j) à $(L+1)(2L+1)$ points, la troncature de $T_{M\bar{M}'}$ au rang L n'est plus une *possibilité* mais devient une *obligation*, car les termes supplémentaires ne donneraient pas zéros mais une valeur fausse. Notons pour finir que rien n'empêche de tronquer $T_{M\bar{M}'}$ à un rang $< L$.

2.7 Découpage en temps

Par rapport à la méthode multipôle fréquentielle, nous voyons apparaître la variable temps dans toutes les définitions, que ce soit les fonctions de radiation ou la fonction de transfert. Il convient de voir comment gérer ce paramètre. Les thèmes évoqués pourront être approfondis dans [6].

2.7.1 Rappels sur l'échantillonnage

Tout d'abord introduisons quelques notations standards. On note $f(t)$ une fonction dépendant du temps t . On note $\hat{f}(\omega)$ sa transformée de Fourier, définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (18)$$

Dans le cas qui nous intéresse, f est réelle, et \hat{f} vérifie la propriété $\hat{f}(-\omega) = [\hat{f}(\omega)]^*$ (où $*$ désigne le complexe conjugué). La transformée de Fourier inverse permet de retrouver f à

partir de \hat{f} :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (19)$$

Les signes présents dans les exponentielles des formules (18) et (19) sont choisis par convention. Par exemple, le *numerical recipes* [12] inverse ces deux signes. De la même manière, on peut utiliser dans le domaine fréquentiel la variable « pulsation » (notée ω) ou la variable « fréquence » (notée f avec $\omega = 2\pi f$). Il est donc important de bien définir ce qu'on appelle transformée de Fourier directe (18) et inverse (19).

L'idée de base pour prendre en compte la variable temporelle est d'échantillonner, i.e. de remplacer la connaissance complète d'une fonction $f(t)$ par la seule connaissance de $f(n\Delta t)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et Δt le pas d'échantillonnage. Mathématiquement, cela revient à substituer à $f(t)$ la distribution $f_{\Delta t}$ définie par :

$$f_{\Delta t} = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\Delta t) \delta_{n\Delta t}$$

La formule de Poisson montre que le spectre de $f_{\Delta t}$ est obtenu en périodisant celui de f , les translations étant multiple de $2\pi/\Delta t$ (cf. figure 16) :

$$\hat{f}_{\Delta t}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\Delta t) e^{-i\omega n \Delta t} \quad (20)$$

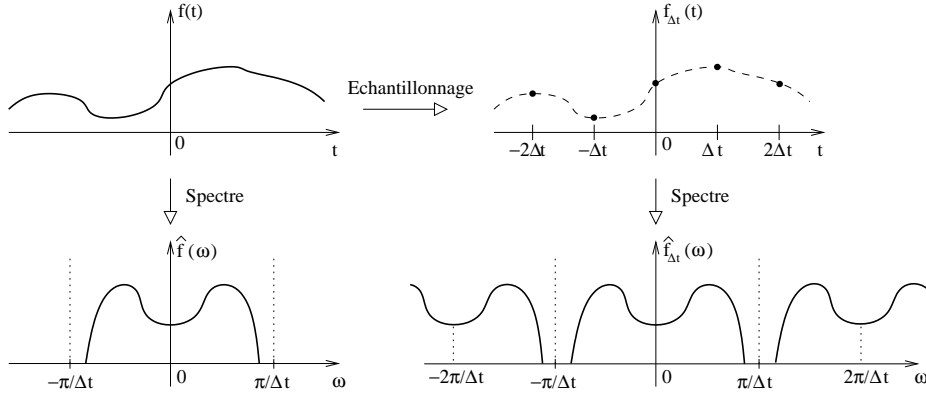


FIG. 16 – Effet de l'échantillonnage de la fonction $f(t)$ sur son spectre

En particulier, si le spectre de f est inclus dans l'intervalle $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$ – comme c'est le cas sur la figure 16 – les lobes périodisés ne se superposent pas. Pour désigner les fonctions dont le spectre est borné on parle de fonction à « bande limitée ». En multipliant $\hat{f}_{\Delta t}$ par le créneau centré $\hat{r}(\omega) = \chi_{[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]}(\omega)$, on retrouve alors \hat{f} :

$$\hat{f}(\omega) = \Delta t \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\Delta t) \hat{r}(\omega) e^{-i\omega n\Delta t}$$

Et par transformée de Fourier inverse, on obtient la formule de Shannon :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)}$$

Ce résultat est remarquable, car il nous dit que la connaissance de f aux points $(n\Delta t)_{n \in \mathbb{Z}}$ suffit à retrouver f partout. La seule condition préalable est que f soit à bande limitée dans $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$. La pulsation $\omega_c = \pi/\Delta t$ est appelée « pulsation de Nyquist ». On note également $f_c = \omega_c/2\pi = 1/2\Delta t$ la fréquence de Nyquist, et $\lambda_c = c/f_c = 2c\Delta t$ la longueur d'onde de Nyquist. La période correspondant à cette fréquence est $2\Delta t$ soit 2 échantillons par longueur d'onde.

Autrement dit, le théorème de Shannon démontre qu'un échantillonnage préserve toute l'information contenue dans un signal $f(t)$ dès lors que ce dernier ne comporte pas de fréquence échantillonnée avec moins de 2 points par longueur d'onde. Si le spectre de f n'est pas borné, ou du moins n'est pas inclus dans $[-\omega_c, \omega_c]$ (figure 17), les zones de recouvrement des lobes périodisés modifie le spectre. Il est alors impossible de retrouver le spectre de f à partir de celui de l'échantillonnage $f_{\Delta t}$. Sur la figure 17, on a marqué en gris la gamme de pulsation « polluée »

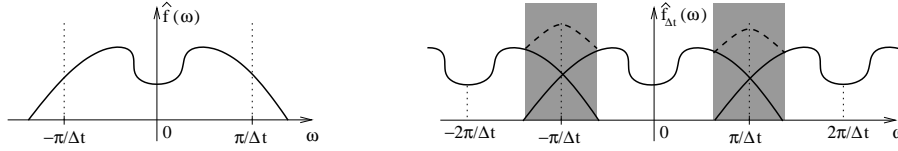


FIG. 17 – Effet de l'échantillonnage sur le spectre d'une fonction à spectre trop large

2.7.2 Transformée de Fourier discrète

Nous allons maintenant présenter la transformée de Fourier discrète et le lien existant avec la transformée de Fourier continue et l'échantillonnage.

Si on se donne une suite de N valeurs notées h_k pour $k = 0, 1, \dots, N-1$, alors la transformée de Fourier discrète d'ordre N de ce signal est définie par :

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-2i\pi n k/N} \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (21)$$

La transformée de Fourier inverse discrète d'ordre N permet de retrouver les h_k à partir des H_n via la formule :

$$h_k = \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{2i\pi nk/N} \text{ pour } k = 0, 1, \dots, N-1$$

Les transformations de Fourier discrètes ne dépendent d'aucun paramètre dimensionnel (pas de temps, durée, ...). Elles transforment simplement N complexes (les h_k) en N autres complexes (les H_n). Les formules de définitions étant périodiques de période N , on peut voir les signaux discrets h_k et H_n comme étant soit finis, soit périodiques sur tout \mathbb{Z} . Comme dans le cas continu, il faut faire attention aux définitions choisies. Par exemple, la bibliothèque FFTW [5] utilise une transformée de Fourier non normalisée, c'est-à-dire sans $1/N$ dans la formule (21). L'application successive des transformées directes et inverses donne alors le signal original multiplié par le nombre d'échantillons N .

Pour se rapprocher des transformées de Fourier continues, il suffit de comparer les formules (21) et (20) : on note $t_n = n \cdot \Delta t$ les dates d'échantillonnages, et l'on considère le signal (discret) composé des $f(t_n)$. Si f est à support borné, on peut calculer la transformée de Fourier discrète de celles de ces valeurs qui sont non nulles (car elles sont en nombre fini). On obtient (après multiplication par $N\Delta t$, ou juste Δt dans le cas d'une transformée de Fourier non normalisée) les valeurs de $\hat{f}_{\Delta t}$ aux pulsations $\omega_k = 2\pi k/N\Delta t$. Autrement dit, la transformée de Fourier discrète des échantillons ne donne pas un échantillonnage du spectre de f mais de celui de $f_{\Delta t}$. Il convient de garder cela à l'esprit dans la mesure où ces deux spectres peuvent être différents (dans le cas présent ils le seront forcément puisqu'une fonction à support borné ne peut pas être à bande limitée). Bien sûr, le grand intérêt des transformations de Fourier discrètes est l'existence d'un célèbre algorithme rapide de calcul appelé FFT pour *Fast Fourier Transform* qui réalise une transformée de Fourier discrète en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations – au lieu de $\mathcal{O}(N^2)$ si on réalise le calcul naïvement (voir par exemple [12] ou [5]).

2.7.3 Convolution

Dernier point de rappel que nous allons évoquer de manière formelle avant de passer à la suite : la convolution. Rappelons que si f et g sont deux fonctions de la variable t , la convolution de ces deux fonctions se note $f * g$, et elle est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{s \in \mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds$$

Le théorème de convolution dit que la transformée de Fourier de $f * g$ est égal au produit de \hat{f} par \hat{g} . Pour des données discrètes r_k et s_k , la convolution est définie par :

$$(r * s)_k = \sum_j r_j s_{k-j}$$

Dans le cas où r_k et s_k sont des signaux finis de même durée N et que l'un des deux est périodiques de période N , le théorème de convolution discret affirme que la transformée de

Fourier discrète de $r * s$ est le produit terme à terme des transformées de Fourier de r_k et s_k . Ceci est très intéressant car cela permet de remplacer un calcul de convolution discrète ($\mathcal{O}(N^2)$ opérations) par une FFT, un produit terme à terme de N valeurs et une FFT inverse (soit $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations). Soulignons également que pour calculer l'échantillonnage de $f * g$ à partir de ceux de f et g , il faut penser à multiplier la convolution discrète de $f(t_j)$ et $g(t_k)$ par le pas de temps Δt .

Dans notre calcul, l'opération de transfert (15) convolue la fonction \mathcal{F}_C par la fonction de transfert $T_{M\bar{M}'}$. On aura donc intérêt à calculer l'une et l'autre dans le domaine fréquentiel. Pour appliquer le théorème de convolution discret à ces fonctions, il faudra prendre quelques précautions dans la mesure où aucune des deux n'est périodique. [12] explique cela très bien, et présente une méthode pour se préserver de ces effets de bords en rajoutant « suffisamment » de zéros à la fin d'un des deux signaux discrétisés.

2.7.4 Applications à l'acoustique temporelle

Revenons à notre problème d'équations intégrales en acoustique temporelle. Le maillage surfacique dont on dispose est composé de triangles dont les arêtes ont pour taille moyenne Δx . Il est généralement admis que la fréquence maximale « propageable » par ce maillage est $f_{max} = c/10\Delta x$. Cela signifie que les fréquences supérieures sont trop élevées pour être correctement prise en compte dans le calcul. On note λ_{max} et ω_{max} la longueur d'onde et la pulsation associées. Le ratio $\lambda_{max}/\Delta x$ (pris ici égale à 10) est appelé « nombre de points par longueur d'onde ».

Par ailleurs, les pas de temps et d'espace Δx et Δt sont reliés par la condition C.F.L. (Courant-Friedrichs-Levy) qui fixe la valeur du ratio :

$$n_{CFL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$c\Delta t$ est la distance sur laquelle les informations se propagent pendant un pas de temps Δt . Si $n_{CFL} > 1$, le signal va « sauter » certains triangles entre deux pas de temps consécutifs t_n et t_{n+1} , et le résultat du calcul sera fatalement faux. Dans la suite, on prendra en général $n_{CFL} = 1/2$.

Ainsi, la discrétisation spatiale conduit à travailler avec des signaux à bande limitée par $\omega_{max} = 2\pi c/10\Delta x$. La discrétisation temporelle nous impose de travailler avec des signaux à bande limitée par $\omega_c = \pi/\Delta t$. On appelle ratio de sur-échantillonnage (*oversampling ratio*) la grandeur χ_0 définie par :

$$\chi_0 = \frac{\omega_c}{\omega_{max}}$$

Ici, on a $\chi_0 = 5/n_{CFL} = 10$. Autrement dit, les signaux à bande limitée par ω_{max} vérifient amplement les conditions d'application du théorème de Shannon. Notre échantillonnage est donc non destructif.

Les pulsations limites ω_{max} et ω_c n'ont pas le même sens, et il est important de comprendre pourquoi. L'espace des pulsations se décompose en trois domaines :

- $|\omega| < \omega_{max}$: Ce sont les pulsations qui nous intéressent, et le maillage a été conçu en conséquence.
- $\omega_{max} < |\omega| < \omega_c$: Ces pulsations ne nous intéressent pas. Les ondes incidentes seront nulles (ou négligeables) dans ce domaine. Au cours du calcul les signaux traités peuvent éventuellement contenir des informations dans ce domaine, il suffira de les ôter à la fin.
- $|\omega| > \omega_c$: Dans ce domaine, il est préférable de n'avoir aucune information à aucun moment du calcul. Sinon, du fait de la périodisation du spectre lors de l'échantillonnage, ces valeurs pourraient venir polluer le spectre dans l'intervalle $[-\omega_c, \omega_c]$, et pourraient ainsi rendre faux notre calcul en polluant $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$.

La pulsation ω_s (pulsation maximale du signal source $\Phi(y, t)$) se trouvera hors de $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$. Les équations résolues étant linéaires, il n'y a pas d'échange entre fréquence. Si l'onde incidente (donnée par l'utilisateur) possède toute son énergie (à un ε près) dans la bande $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$, il en sera de même pour les signaux de sorties. Par contre, il y a dans les opérations évoqués à la section 2.1 un opérateur susceptible de brouiller les fréquences : la troncature en temps.

2.7.5 Troncature en temps

D'après la formule (8), on cherche avec notre méthode multipôle temporelle à calculer le rayonnement sur la structure d'une fonction $\Phi(y, t)$ définie par la donnée de A^n , solution du problème à la date $t_n = n\Delta t$. Par exemple, sur la figure 18, seul l'échantillon à la date $t_1 = \Delta t$ est conservé.

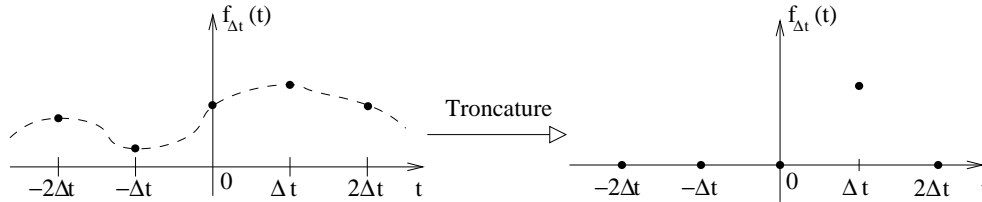


FIG. 18 – Troncature en temps d'un signal échantillonné

On se place en un point $y \in \Gamma$ quelconque, et l'on note f la fonction source en ce point $f(t) = \Phi(y, t)$, et $f_{\Delta t}$ la même fonction échantillonnée. Pour calculer la fonction de radiation $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ (équation (14)), on a besoin de $f(t)$ pour tout t . La question est donc de savoir comment calculer $f(t)$ si t n'est pas un multiple entier de Δt . Autrement dit, on cherche à interpoler des données échantillonnées $f(t_k)$ pour pouvoir ensuite les ré-échantillonner à des dates t quelconques. De plus, cette interpolation doit assurer la préservation du spectre de

f (au même titre que les échantillonnages), en particulier dans l'intervalle $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ qui nous intéresse. Enfin, cette fonction $f(t)$ doit être à bande limitée (de limite notée ω_s) afin de pouvoir utiliser la discrétisation de la sphère unité de la section 2.6.

Si on interpole notre unique échantillon de manière naïve, par exemple constante par morceaux (comme sur la figure 19 où le spectre du signal obtenu est un sinus cardinal) ou linéairement (comme sur la figure 20 où le spectre est un sinus cardinal au carré), alors le résultat n'est pas à bande limitée (où alors de manière approchée et avec une limite ω_s tellement élevée que le nombre de point d'interpolation sur la sphère unité serait prohibitif).

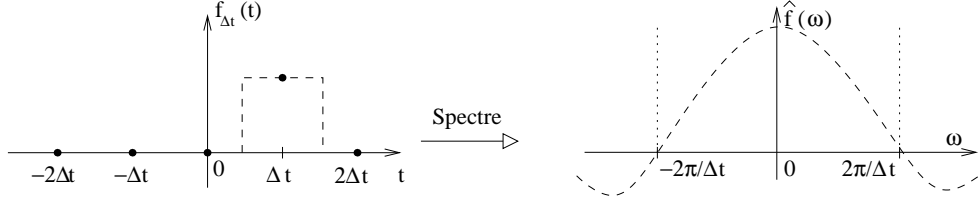


FIG. 19 – Interpolation constante par morceaux

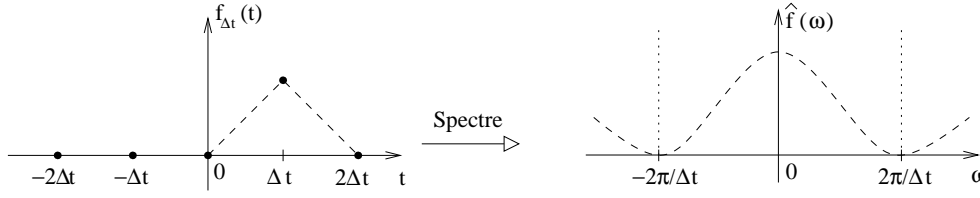


FIG. 20 – Interpolation linéaire

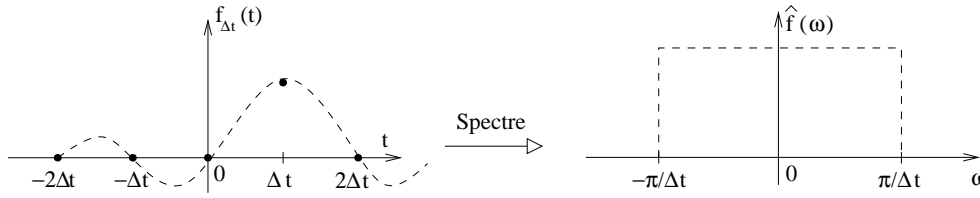


FIG. 21 – Interpolation par la formule de Shannon

Une solution est d'utiliser le théorème de Shannon, qui permet d'écrire :

$$\Phi(x, t) = \Phi(x, n\Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)}$$

Avec cette formule d'interpolation, on est assuré d'avoir un résultat à bande limitée (figure 21). En revanche, la convergence lente du sinus cardinal vers 0 rend cette formule peu utile en pratique. En effet, pour des raisons évidentes d'implémentation, nous cherchons un interpolant qui – tout en étant à bande limitée – ait en plus un support en temps limité (à une erreur ε près). Pour trouver une telle fonction, il suffit de revenir à la preuve de la formule de Shannon, en y laissant la fonction $\hat{r}(\omega)$. On obtient :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\Delta t) \frac{\Delta t}{2\pi} r(t - n\Delta t) \quad (22)$$

Pour que cette formule soit juste *dans le cadre de notre application*, il suffit que :

- $\hat{r}(\omega)$ soit égal à 1 (ou très proche) dans $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$, afin de conserver les données calculées ;
- $\hat{r}(\omega)$ soit égal à 0 (ou très proche) dans tous les intervalles $[-\omega_{max} + n \times 2\omega_c, \omega_{max} + n \times 2\omega_c]$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ de sorte que lors de l'échantillonnage et de la périodisation du spectre l'intervalle $[-\omega_{max}, \omega_{max}]$ ne soit pas modifié. Prendre $\hat{r}(\omega)$ égal à 0 en dehors de $[-\omega_c, \omega_c]$ est une manière simplifiée de vérifier cela.
- $\hat{r}(\omega)$ soit à bande limitée, c'est-à-dire égal à 0 (ou très proche) en dehors de $[-\omega_s, \omega_s]$ avec $\omega_s \geq \omega_{max}$ bien sûr.

Pour le reste, on fait ce qu'on veut (voir par exemple [8]), sachant qu'un raccordement \mathcal{C}^∞ assurera une décroissance rapide de r . Par exemple, on peut prendre pour $\hat{r}(\omega)$ la convolution d'un créneau et d'une fonction \mathcal{C}^∞ en forme de cloche.

Ergin [4] propose ainsi la fonction $r(t)$ suivante (qui intègre déjà le coefficient $\Delta t/2\pi$ de la formule 22) qui est une variante des fonctions APS (*approximate prolate spheroidal*) introduite par Knab [9] :

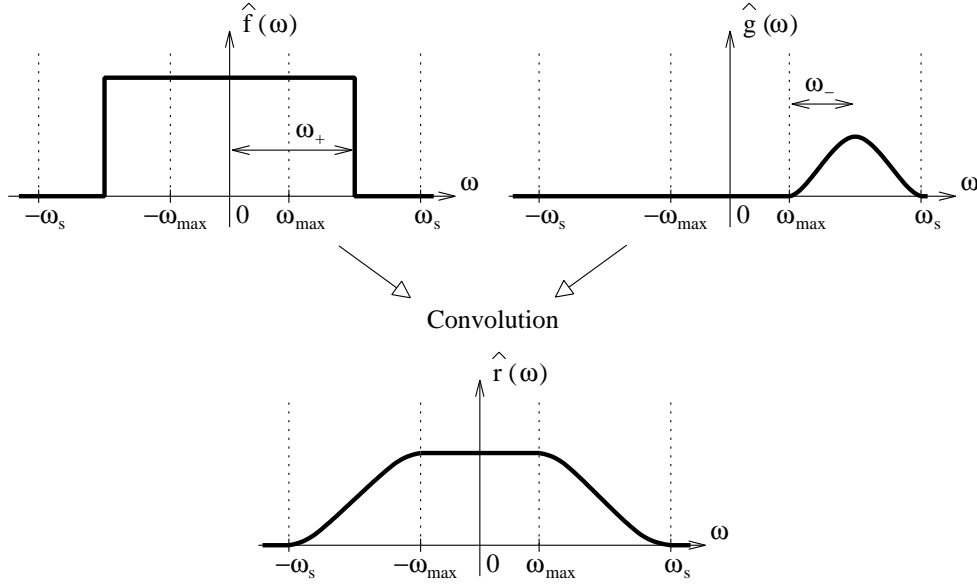
$$r(t) = \frac{\omega_+}{\omega_c} \frac{\sin(\omega_+ t)}{\omega_+ t} \frac{\sinh\left(p_t \Delta t \omega_- \sqrt{1 - t^2/p_t^2 \Delta_t^2}\right)}{\sinh(p_t \Delta t \omega_-) \sqrt{1 - t^2/p_t^2 \Delta_t^2}} \quad (23)$$

avec $\omega_\pm = (\omega_s \pm \omega_{max})/2$. Dans ce cas, $\hat{r}(\omega)$ est la convolution d'un créneau de demi-largeur ω_+ et d'une « cloche » \mathcal{C}^∞ de demi-largeur ω_- (figure 22). Ainsi $\hat{r}(\omega)$ est nul en dehors de $[-\omega_s, \omega_s]$. $r(t)$ est paire et réelle, donc $\hat{r}(\omega)$ est paire et réelle aussi.

ω_s peut prendre n'importe quelle valeur entre ω_{max} (non inclus) et $2\omega_c - \omega_{max}$. Il est important de comprendre que contrairement à ω_{max} et ω_c , la pulsation de seuil ω_s peut être librement choisie au moment du calcul. Sa valeur sera un des paramètres d'optimisation du code. On note χ_s le ratio ω_s/ω_{max} (qui varie donc entre 1 et $2\chi_0 - 1$). p_t est un entier définissant la durée approximative de l'interpolant. Contrairement aux interpolants des figures 19, 20 et 21, cette fonction n'est pas un interpolant exact en temps, c'est-à-dire qu'il ne vaut pas zéro aux dates t_k pour $k \neq 0$.

La restriction de $r(t)$ à $[-p_t \Delta_t, p_t \Delta_t]$ introduit une erreur relative ε_t qui vérifie :

$$\varepsilon_t \leq \frac{1}{\sinh(p_t \Delta t \omega_-)} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\chi_s - 1}{\chi_0}\right) p_t\right)} \quad (24)$$

FIG. 22 – *Interpolation optimisée*

Dans notre application, avec un facteur de sur-échantillonnage χ_0 égal à 10 et un χ_s pris égal à χ_0 (ce qui correspond à $\omega_s = \omega_c$), le tableau 1 donne la valeur à prendre pour p_t en fonction de la précision ε_t voulue. Les précisions très élevées peuvent servir pour des sources ponctuelles. Les nôtres étant surfaciques, et la surface étant approximée par un maillage en triangle, on ne s'intéressera pas aux ε_t en dessous de 10^{-4} .

ε_t	p_t
10^{-2}	4
10^{-3}	6
10^{-4}	7
10^{-5}	9
10^{-6}	11

TAB. 1 – *Suggestions de valeurs pour p_t en fonction de ε_t dans le cas $\chi_s = 10$*

La formule (24) suggère que pour une précision ε_t fixée, le produit $(\omega_s - \omega_{max})p_t$ est constant. Plus la fonction $r(t)$ est large dans le domaine spectral (ω_s grand), plus son support temporel est étroit (p_t petit). Puisqu'une fonction large dans le domaine spectral nécessite plus de points de discrétisation sur la sphère unité \mathcal{S} , on voit que le choix de ω_s devra faire l'objet d'un compromis entre le nombre de points sur \mathcal{S} et le nombre de points en

temps. Dans nos applications, une précision de 10^{-2} sera probablement suffisante, d'autant qu'elle ne s'applique qu'aux interactions lointaines. Avec une valeur de ε_t fixée, p_t et χ_s sont liés par la relation

$$(\chi_s - 1)p_t = \frac{2\chi_0}{\pi} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_t}\right)$$

Pour $\varepsilon_t = 10^{-2}$, le membre de droite vaut (environ) 33,7 d'où les résultats du tableau 2.

χ_s	p_t
17,9	2
9,5	4
6,7	6
5,3	8
4,4	10
3,9	12
3,5	14
3	17
2	34

TAB. 2 – Suggestions de valeurs pour p_t en fonction de χ_s dans le cas $\varepsilon_t = 10^{-2}$

2.7.6 Synthèse

En résumé, la fonction $\Phi(x, t)$ définie par la donnée de A^n , solution du problème à la date $t_n = n\Delta t$, est interpolée à toute date t par la formule :

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \Phi(x, n\Delta t)r(t - n\Delta t) & \text{pour } |t - n\Delta t| \leq p_t\Delta t \\ 0 & \text{pour } |t - n\Delta t| > p_t\Delta t \end{cases}$$

où $r(t)$ est la fonction d'interpolation choisie. On est alors sûr de préserver toute l'information dans la bande $[-\omega_{max}, +\omega_{max}]$ à une erreur ε_t près.

2.8 Calcul des opérateurs

2.8.1 Initialisation

La première étape du calcul consiste à calculer la fonction de radiation

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap C} \Phi(y, t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) dy$$

avec $\vec{s} \in \mathcal{S}$ et C un domaine de notre subdivision centré en M . On note R_C le rayon de C (qui vaut $\sqrt{3}a/2$ pour un cube d'arête a). Notons r_t le plus petit entier strictement supérieur à $R_C/c\Delta t$. r_t est en quelque sorte le rayon de la boîte C en nombre de $c\Delta t$.

$\Phi(y, t)$ étant nulle pour $|t - n\Delta t| > p_t\Delta t$, et la quantité $\vec{s} \cdot y \vec{M}$ étant comprise entre $-R_C$ et R_C , la fonction de radiation $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ est pour sa part nulle pour $|t - n\Delta t| > p_t\Delta t + R_C/c$. Sachant que $R_C/c < r_t\Delta t$, on en déduit que $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ est nulle pour $|t - n\Delta t| \geq (p_t + r_t)\Delta t$.

$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t_k)$ est nulle pour tout k vérifiant $|k - n| \geq p_t + r_t$. Le nombre d'échantillons non nuls pour \mathcal{F}_C est au plus $2(p_t + r_t) - 1$. Ce nombre est donné pour la fonction \mathcal{F}_C dans son ensemble, mais si on s'intéresse à une direction \vec{s} précise ou au cas particulier d'une cellule \mathcal{C} donnée, le nombre d'échantillons non nuls peut être alors plus faible (tout en restant supérieur à $2p_t + 1$, le nombre d'échantillons non nuls pour r). Pour simplifier, on retiendra que le nombre d'échantillons non nuls d'une fonction de radiation \mathcal{F}_C est au plus $2(p_t + r_t) - 1$. Dans le cadre d'un calcul multipôle mono-niveau, ce nombre est le même pour toutes les fonctions de radiation. Si on utilise une FMM multi-niveau, r_t dépend du niveau donc ce nombre est le même pour toutes les fonctions de radiation \mathcal{F}_C situées à un niveau donné.

La transformée de Fourier de cette fonction est :

$$\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, \omega) = \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} \hat{\Phi}(y, \omega) e^{-i \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c} \omega} dy \quad (25)$$

On retrouve une formule ressemblant bien sûr à l'étape d'initialisation de la FMM en fréquence, et seul le signe dans l'exponentielle change. La raison en est simple : en fréquentiel nous avons pris une dépendance implicite en temps en $e^{-i\omega t}$ alors qu'ici pour passer du fréquentiel au temporel on multiplie par $e^{+i\omega t}$ (cf. équation 19). Du coup, la fréquence ω dans la méthode fréquentielle correspond à $-\omega$ dans notre calcul temporel. Du point de vue fréquentiel, $\hat{\mathcal{F}}$ est à bande limitée tout comme $\hat{\Phi}$, et seule la portion $[-\omega_{max}, +\omega_{max}]$ du spectre nous intéresse. Tous les développements de la section 2.7 concernant l'échantillonnage s'appliquent à $\hat{\mathcal{F}}$.

Pour calculer $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ aux dates t_k et dans les directions tabulées \vec{s}_{ij} , on utilisera des points d'intégrations de Gauss placés sur la surface de $\Gamma \cap \mathcal{C}$. Pour calculer ensuite la transformée de Fourier $\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, \omega)$, on pourra soit faire une FFT de $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$, soit calculer directement $\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, \omega)$ à partir de (25) en calculant $\hat{\Phi}(y, \omega)$ par FFT. S'il s'avère que l'on a pas besoin de la fonction de radiation \mathcal{F}_C dans le domaine temporel, ce deuxième choix sera sans doute préférable.

2.8.2 Transfert

2.8.2.1 Troncature Rappelons la définition de la fonction de transfert donnée par l'équation (15) :

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot M \vec{M}'}{c})$$

Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{T}_{M\vec{M}'}(\vec{s}, \omega) = e^{-i\omega \vec{s} \cdot M \vec{M}' / c} \quad (26)$$

Ainsi écrite, cette fonction n'est pas de largeur de bande finie sur la sphère unité \mathcal{S} . Le produit de convolution de $T_{M\vec{M}'}$ par \mathcal{F}_c ne peut donc pas être intégré sur \mathcal{S} via la quadrature présentée à la section 2.6. Il convient donc de trouver une restriction de $T_{M\vec{M}'}$ aux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ de largeur de bande inférieure ou égale à L . Pour ce faire, on note P_l le polynôme de Legendre de rang l . D'après [11], on a la propriété suivante au sens des distributions sur $[-1,1]$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (l+1/2) P_l(x) P_l(y) = \delta(x-y)$$

On applique cette propriété à $T_{M\vec{M}'}$ avec $x = ct/MM'$ et $y = \cos(\vec{s}, M\vec{M}')$ (y est le cosinus de l'angle formé par les vecteurs \vec{s} et $M\vec{M}'$) :

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \begin{cases} \frac{c}{MM'} \sum_{l=0}^{+\infty} (l+1/2) P_l\left(\frac{ct}{MM'}\right) P_l\left(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')\right) & \text{si } |t| < \frac{MM'}{c} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le polynôme $P_l(\cos(\vec{s}, M\vec{M}'))$ étant de largeur de bande l sur \mathcal{S} , on obtient facilement la restriction de $T_{M\vec{M}'}$ aux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathcal{S})$ de largeur de bande inférieure ou égale à L , que l'on note $T_{M\vec{M}'}^L$:

$$T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t) = \begin{cases} \frac{c}{MM'} \sum_{l=0}^L (l+1/2) P_l\left(\frac{ct}{MM'}\right) P_l\left(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')\right) & \text{si } |t| < \frac{MM'}{c} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour obtenir la transformée de Fourier de cette expression, on ne peut pas utiliser de transformée de Fourier discrète (car $T_{M\vec{M}'}^L$ et $T_{M\vec{M}'}$ ne sont pas à bande limitée en fréquence, voir la remarque à ce sujet de la section 2.7.2). Néanmoins, on peut calculer explicitement $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L$. Pour cela, notons j_l la fonction de Bessel sphérique de rang l . Toujours d'après [11], on a :

$$j_l(k) = (-i)^l \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{ikx} P_l(x) dx$$

d'où on déduit la transformée de Fourier de P_l : $\hat{P}_l(\omega) = 2(-i)^l j_l(\omega)$ (Plus exactement, il s'agit de la transformée de Fourier de la fonction égale à P_l sur $[-1,1]$ et à 0 partout ailleurs). On obtient alors la transformée de Fourier de $T_{M\vec{M}'}^L$:

$$\hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, \omega) = \sum_{l=0}^L (2l+1) (-i)^l j_l\left(\frac{\omega MM'}{c}\right) P_l\left(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')\right) \quad (27)$$

Notons que nous aurions pu déduire (27) directement de (26) à partir de la décomposition suivante (issue de [11]) :

$$e^{ikx} = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1)(i)^l j_l(k) P_l(x)$$

en prenant $k = -\omega MM'/c$ et $x = \cos(\vec{s}, \vec{M}\vec{M}')$.

2.8.2.2 Convolution On note $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}$ le résultat de la convolution de la fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}^L$ et de la fonction de radiation $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}(\vec{s}, t) = T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t) * \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}, t)$$

Du point de vue physique, $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}$ représente l'action de \mathcal{C} sur \mathcal{C}' .

Rappelons que la fonction $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}, t)$ est nulle pour $|t - n\Delta t| > p_t\Delta t + R_{\mathcal{C}}/c$ ce qui représente $2(p_t + r_t) - 1$ échantillons non nuls (au plus). Notons d_t le plus petit entier strictement supérieur à $MM'/c\Delta t$. d_t est la distance du transfert (i.e. entre les centres des boîtes \mathcal{C} et \mathcal{C}') en nombre de $c\Delta t$. La fonction de transfert $T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t)$ est nulle pour $|t| > MM'/c$ donc aussi pour $|t| \geq d_t\Delta t$. Le nombre d'échantillons non nuls pour $T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t)$ est au plus $2d_t - 1$.

La fonction $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}$ sera donc nulle pour $|t - n\Delta t| > p_t\Delta t + (MM' + R_{\mathcal{C}})/c$ donc a fortiori pour $|t - n\Delta t| \geq (p_t + r_t + d_t)\Delta t$. En fait, par le jeu de l'échantillonnage, la fonction $\mathcal{G}_{\mathcal{C}'}$ aura $2(p_t + r_t + d_t) - 3$ échantillons non nuls centrés en t_n . Notons que la moitié de ces échantillons correspondent à des dates antérieures à t_n et ne serviront pas au résultat final.

2.8.2.3 Comparaison avec la FMM Avant de passer à la suite, attardons nous sur l'expression obtenue pour la transformée de Fourier de $T_{M\vec{M}'}^L$. On note $\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s})$ la fonction de transfert de la FMM fréquentielle tronquée au rang L . Elle est donnée par :

$$\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) = \frac{ik}{16\pi^2} \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k \cdot |M\vec{M}'|) P_l(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')) \quad (28)$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde. En fréquentiel, la dépendance des fonctions en ω est bien sûr implicite. Comme attendu, on trouve une formule proche de celle obtenue dans le cas temporel (équation (27)), à une exception près : en fréquentiel une fonction de Hankel du premier type $h_l^{(1)}$ remplace la fonction de Bessel j_l présente dans (27). C'est une différence de taille, car c'est cette fonction de Bessel qui est responsable des limitations à basse fréquence de la FMM. En effet, $h_l^{(1)}(x)$ « explose » lorsque x est très petit devant l (empêchant de prendre des boîtes de taille très petite devant la longueur d'onde λ). Ici rien de tel, puisque la fonction j_l (qui est la partie réelle de $h_l^{(1)}$) ne présente aucune singularité. Cela implique que pour une taille de boîte donnée, nous pourrions traiter toutes les fréquences de 0 à ω_{\max} .

La différence entre (27) et (28) s'explique en se souvenant que notre calcul temporel utilise un noyau modifié, soustraction du noyau usuel et d'un noyau anti-causal :

$$\tilde{G}(R, t) = \frac{1}{4\pi R} \left(\delta\left(t - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{R}{c}\right) \right) \quad (29)$$

Le noyau usuel (correspondant au noyau fréquentiel $e^{ikR}/4\pi R$) conduit à utiliser la fonction de transfert (28) qui sert dans la formule fondamentale de la FMM :

$$\frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}} \mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) d\vec{s} \quad (30)$$

où l'on note $\vec{r} = \vec{y}\vec{x} - M\vec{M}'$. Le noyau anti-causal correspond au noyau fréquentiel conjugué $e^{-ikR}/4\pi R$ et conduit à utiliser la fonction de transfert conjuguée $(\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L)^*$. L'équivalent de la formule (30) pour le noyau conjugué s'écrit :

$$\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{-ik\vec{s} \cdot \vec{r}} (\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L)^*(\vec{s}) d\vec{s} \quad (31)$$

Pour pouvoir soustraire (30) et (31) et se rapprocher de la formule (29), on remplace \vec{s} par $-\vec{s}$ dans la seconde formule. Comme c'est une intégrale surfacique, il n'y a pas de changement de signe. Il reste :

$$\frac{e^{ikR}}{4\pi R} - \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} e^{ik\vec{s} \cdot \vec{r}} \left[\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) - (\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L)^*(-\vec{s}) \right] d\vec{s} \quad (32)$$

Le terme entre crochets représente la fonction de transfert associée au noyau du membre de gauche. Comme vu à la section 2.8.1, la fréquence ω dans la méthode fréquentielle correspond à $-\omega$ dans notre calcul temporel. La transformée de Fourier $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L$ de la fonction de transfert temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, -\omega) &= \mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}) - (\mathbb{T}_{M\vec{M}'}^L)^*(-\vec{s}) \\ &= \frac{ik}{16\pi^2} \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k \cdot |M\vec{M}'|) P_l(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')) \\ &\quad - \frac{-ik}{16\pi^2} \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) (-i)^l h_l^{(2)}(k \cdot |M\vec{M}'|) P_l(-\cos(\vec{s}, M\vec{M}')) \end{aligned}$$

Sachant que :

- $h_l^{(2)}$ est le conjugué complexe de $h_l^{(1)}$,
- $j_l = (h_l^{(1)} + h_l^{(2)})/2$,
- $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$,
- $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$,

en remettant ω à la place de $-\omega$, il reste une formule très proche de (27) :

$$\hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, \omega) = -\frac{i\omega}{8\pi^2 c} \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) (-i)^l j_l(k \cdot |M\vec{M}'|) P_l(\cos(\vec{s}, M\vec{M}'))$$

La différence dans les constantes provient des choix fait dans la définition des fonctions de transfert : $T_{M\vec{M}'}^L$ n'inclut pas le coefficient $-1/8\pi^2 c$ de l'équation (12) ni la dérivée en temps (qui produit le $i\omega$), contrairement à la fonction de transfert fréquentielle qui – elle – inclut la constante $-ik/16\pi^2$. Le remplacement de $h_l^{(1)}$ par j_l rend la série convergente et permet de prendre $L = +\infty$. Ainsi, le noyau modifié choisi permet de ne conserver que la partie régulière de la fonction de transfert apparaissant dans la FMM fréquentielle. On supprime ainsi toutes les difficultés numériques liées à cette singularité. La seule contrepartie au remplacement du noyau réel par le noyau modifié est l'introduction d'un signal fantôme, que l'on peut aisément supprimer car on est dans le domaine temporel.

2.8.3 Intégration

La dernière étape de l'algorithme consiste à intégrer la fonction $\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t)$ via la formule suivante :

$$-\frac{1}{8\pi^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}' x}{c}\right) * \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t) \right] \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dt d\vec{s}$$

Dans cette formule, φ_i représente une fonction de base située dans la cellule C' , et m est un indice temporel postérieur à n (rappelons que les courants A^n à la date t_n sont la source du calcul réalisé). L'intégration en $x \in \Gamma \cap C'$ se fait via des points de Gauss placés sur Γ . L'intégration sur $\vec{s} \in \mathcal{S}$ se fait en passant en revue les points de discrétisation de la sphère unité \mathcal{S} (cf. section 2.6). Enfin, compte tenu de la définition de $\chi_m(t)$ (cf. figure 2) qui vaut 1 pour $t \in [t_{m-1}, t_m]$ et 0 ailleurs, l'intégration en temps sur $t \in \mathbb{R}$ et la dérivée $\partial/\partial t$ se ramène au calcul du saut de la fonction $\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t - \vec{s} \cdot \vec{M}' x / c)$ entre t_{m-1} et t_m . Ainsi, seules les valeurs de $\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t)$ pour des dates situées dans l'intervalle $t \in [t_{m-1} - R_C/c, t_m + R_C/c]$ seront utilisées ici.

La fonction $\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t)$ pourra être interpolée de manière simple (linéaire, par exemple) ou plus fine (via des fonctions APS, comme lors de l'initialisation). Dans le cas où notre calcul multipôle sert par exemple à produire un champ proche ou lointain, les considérations de la section 2.7.5 sur l'interpolation n'ont pas lieu d'être puisque les données interpolées ne seront pas ré-échantillonnées par la suite. Par contre, si on est au sein d'un solveur pas à pas en temps, les potentiels calculés seront amenés à rayonner à leur tour, il convient donc de les intégrer finement afin de ne pas brouiller leur spectre.

2.9 Retour vers le problème initial

2.9.1 Suppression du signal fantôme

Dans nos développements, nous avons volontairement mis entre parenthèse le signal fantôme, c'est-à-dire la différence entre le noyau de Green réel :

$$G(R, t) = \frac{\delta(t - R/c)}{4\pi R}$$

et le noyau modifié :

$$\tilde{G}(R, t) = \frac{1}{4\pi R} \left(\delta\left(t - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{R}{c}\right) \right)$$

Comme expliqué à la section 2.3, le signal anti-causal est matérialisé par un front d'onde qui se propage de l'infini vers le point source avec une célérité c . Nous allons maintenant voir comment supprimer ces données parasites de nos calculs. On se place toujours dans le cadre du calcul de l'interaction entre une cellule source \mathcal{C} et une cellule destination \mathcal{C}' de notre grille. En tout point $y \in \Gamma \cap \mathcal{C}$, la fonction source est nulle pour $|t - n\Delta t| > p_t \Delta t$. Autrement dit, les sources commencent à émettre à la date $T_{start} = t_n - p_t$ et cessent d'émettre à la date $T_{stop} = t_n + p_t$. En un point x quelconque de l'espace, le signal fantôme issu du point y est non nul à l'intérieur de l'intervalle $[T_{start} - d/c, T_{stop} - d/c]$ avec $d = |x - y|$. Le signal réel est non nul à l'intérieur de l'intervalle $[T_{start} + d/c, T_{stop} + d/c]$.

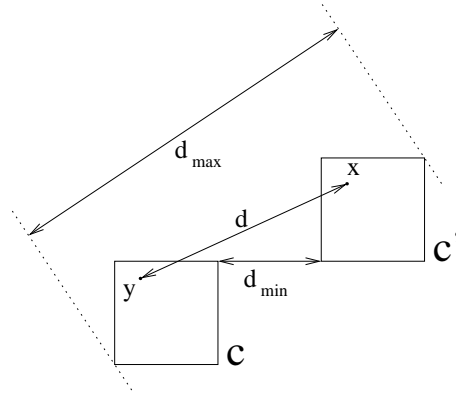


FIG. 23 – Configuration géométrique

Notons d_{min} et d_{max} les distances minimales et maximales entre deux points quelconques de \mathcal{C} et \mathcal{C}' (voir figure 23). Le signal fantôme issu de \mathcal{C} est non nul (quelque part) à l'intérieur de \mathcal{C}' entre les dates $T_{start} - d_{max}/c$ et $T_{stop} - d_{min}/c$. Le signal réel issu de \mathcal{C} est non nul (quelque part) à l'intérieur de \mathcal{C}' entre les dates $T_{start} + d_{min}/c$ et $T_{stop} + d_{max}/c$. Les deux signaux sont disjoints dès lors que :

$$T_{stop} - d_{min}/c < T_{start} + d_{min}/c$$

ce qui s'écrit encore :

$$t_n + p_t \Delta t - d_{min}/c < t_n - p_t \Delta t + d_{min}/c$$

Cette condition donne à la fois une contrainte sur les paramètres du problème et (si cette contrainte est vérifiée) un moyen de supprimer le signal fantôme. La contrainte porte sur

d_{min} , et elle s'écrit : $d_{min} > p_t c \Delta t$. Si on utilise un découpage en cube (cf. figure 14 et 23), d_{min} est au minimum l'arête des cubes. Si cette condition est vérifiée, il suffit de choisir une date T_{cut} comprise (au sens strict) entre $T_{stop} - d_{min}/c$ et $T_{start} + d_{min}/c$ et d'annuler tous les signaux avant cette date T_{cut} pour être sûr d'annuler le signal fantôme sans toucher au signal réel. Un choix simple consiste à prendre $T_{cut} = t_n$.

2.9.2 Résolution pas-à-pas en temps

On conserve les notations de la section précédente. Pour utiliser cette méthode de calcul dans un solveur pas-à-pas en temps, il faut imposer une seconde condition : que le signal réel n'atteigne pas C' avant la date t_n . En effet, tout ce qui précède cette date correspond au passé, et est donc figé. On doit ainsi imposer :

$$T_{start} + d_{min}/c > t_n$$

ce qui revient à prendre à nouveau $d_{min} > p_t c \Delta t$.

Si cette condition est vérifiée, on pourra réaliser l'intégration de la section 2.8.3 pour toutes les dates $t_m > t_n$ en ayant l'assurance :

- de ne rien perdre du signal réel ;
- de ne rien prendre du signal fantôme.

2.9.3 Dérivées normales

A la section 2.2, nous avons ôté des opérateurs de dérivées normales pour aboutir à la formule (11). Nous allons maintenant voir comment les réintroduire dans le calcul. Reprenons la formule (13), dans laquelle les variables x et y sont parfaitement séparées. On applique la dérivé $\partial/\partial n_y$ au seul terme en y , on obtient la formule pour calculer \mathcal{F}_C :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap C} \frac{\partial}{\partial n_y} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) dy$$

or

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) = \vec{n}_y \cdot \vec{\nabla}_y \left[\Phi(y, t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) \right]$$

Notons $f(y, t) = t - \vec{s} \cdot y \vec{M}/c$. Le gradient de la fonction composée $\Phi(y, f(y, t))$ s'écrit :

$$\vec{\nabla}_y [\Phi(y, f(y, t))] = (\vec{\nabla}_y \Phi)(y, f(y, t)) + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)(y, f(y, t)) \right] (\vec{\nabla}_y f)(y, f(y, t))$$

$\Phi(y, t)$ étant définie sur Γ , son gradient spatial est tangent à la surface Γ au point y , i.e. normal à \vec{n}_y . Avec $\vec{\nabla}_y f = \vec{s}/c$, il reste :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap C} \frac{\vec{n}_y \cdot \vec{s}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) * \Phi(y, t) dy$$

De même, l'opérateur $\partial/\partial n_x$ va apparaître dans la définition de l'opération d'intégration, qui consiste alors à calculer :

$$-\frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \left[\delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}\right) * \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t) \right] \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dt d\vec{s}$$

$\partial_{n_x} \varphi_i(x)$ étant nul (car $\vec{\nabla} \varphi_i$ est tangent à Γ), on a :

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \left[\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) \varphi_i(x) \right] = -\frac{\vec{n}_x \cdot \vec{s}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}) \right] \varphi_i(x)$$

On voit donc apparaître deux nouvelles dérivées en temps dans les calculs d'intégration et d'initialisation de l'algorithme. Or, dans le produit de convolution initial (13), les dérivées en temps ainsi extraites peuvent être appliquées au terme que l'on veut. On pourra donc les transférer dans l'opérateur de transfert $T_{MM'}$ qui s'écrira désormais :

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}\vec{M}'}{c}\right)$$

Cela ne change rien à tous les développements de la section 2.8.2 sur cette fonction de transfert. On déplace la division par c de l'initialisation vers l'intégration, on peut alors mettre à jour les trois phases du calcul :

Initialisation : on calcule

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap C} (\vec{n}_y \cdot \vec{s}) \Phi(y, t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) dy$$

Transfert : on convolue \mathcal{F}_C par

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}\vec{M}'}{c}\right)$$

Intégration : on intègre

$$-\frac{1}{8\pi^2 c^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} -\vec{n}_x \cdot \vec{s} \left[\frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}'x}{c}\right) * T_{M\vec{M}'}(\vec{s}) * \mathcal{F}_C(\vec{s}, t) \right] \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dt d\vec{s}$$

Une manière simple de prendre ces modifications en compte dans le calcul est de considérer que la fonction de base en espace sur Γ est désormais $\vec{n}_x \varphi_i(x)$ (au lieu de $\varphi_i(x)$).

3 Mise en œuvre

Nous allons maintenant expliciter de manière concrète les différentes fonctions utilisées lors de l'algorithme multipôle temporel, puis présenter les premiers résultats obtenus lors de l'implémentation de cette méthode dans notre solveur pas à pas en temps.

3.1 Premières expérimentations

Interpolation Nous avons choisi à la section 2.7.5 de remplacer la fonction d'interpolation affine par morceaux de la figure 20 par une interpolation plus subtile donnée par l'équation (23) et que nous appellerons APS. La figure 24 compare les deux interpolations : La fonction chapeau est non nulle en un seul point, la fonction APS est nulle en dehors de $[-p_t \Delta t, p_t \Delta t]$ (avec ici $p_t = 8$). L'interpolation complète s'étend sur 100 pas de temps, dont seulement une trentaine sont tracés sur la figure 24.

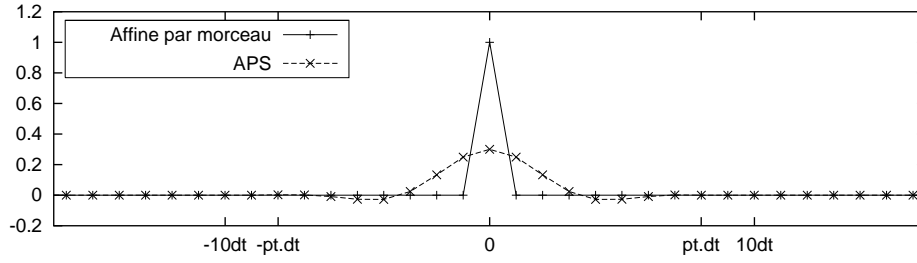


FIG. 24 – Interpolation affine par morceaux et APS

La transformée de Fourier discrète des deux échantillons est tracée sur la figure 25. Comme prévu, les deux spectres coïncident sur $[0, f_{max}]$, puis celui de la fonction APS décroît sur $[f_{max}, f_s]$ (on a pris $\chi_s = 5$ soit $f_s = 5f_{max}$) pour s'annuler sur $[f_s, f_c]$. Le spectre de la fonction affine est ici constant égal à 1, puisque c'est la FFT d'un « dirac numérique ».

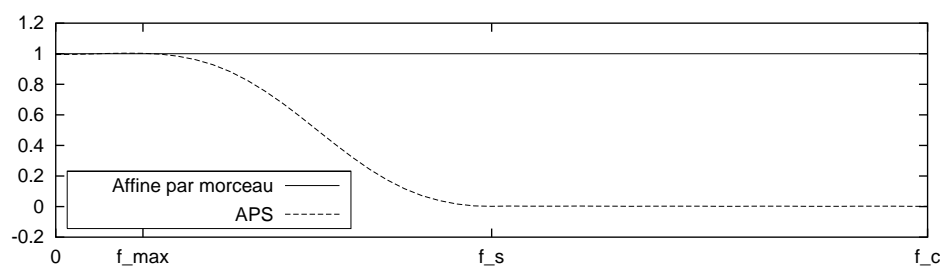
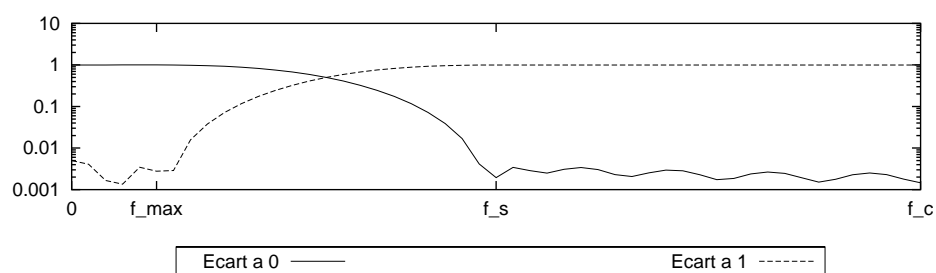
L'erreur ε_t provoquée par le remplacement de la fonction affine par la fonction APS se mesure :

- D'une part par l'écart par rapport à 1 sur $[0, f_{max}]$;
- D'autre part par l'écart par rapport à 0 sur $[f_s, f_c]$.

On a tracé sur la figure 26 $|\hat{r}(\omega) - 1|$ et $|\hat{r}(\omega)|$ en échelle logarithmique.

Notons ε_t^1 et ε_t^2 ces deux erreurs (qui sont principalement fonction de p_t et χ_s) :

$$\begin{cases} \varepsilon_t^1 = \max_{\omega \in [0, f_{max}]} |\hat{r}(\omega) - 1| \\ \varepsilon_t^2 = \max_{\omega \in [f_s, f_c]} |\hat{r}(\omega)| \end{cases}$$

FIG. 25 – *Interpolation affine par morceaux et APS*FIG. 26 – *Distance de $\hat{r}(\omega)$ à 0 et 1*

Rappelons que nous avons un majorant pour ε_t donné par (24). On donne dans le tableau 3 quelques valeurs de ε_t^1 , ε_t^2 et de ce majorant pour quelques valeurs de p_t et χ_s . On vérifie que le majorant donné par (24) majore bien ε_t^1 et ε_t^2 , ce dernier étant en général le plus grand des deux.

p_t	χ_s	ε_t^1	ε_t^2	Majorant de ε_t
5	2	$1,97.10^{-1}$	$2,43.10^{-1}$	1,15
5	5	$1,14.10^{-2}$	$2,50.10^{-2}$	$8,66.10^{-2}$
5	8	$1,84.10^{-3}$	$3,21.10^{-3}$	$8,19.10^{-3}$
10	2	$1,03.10^{-1}$	$1,11.10^{-1}$	$4,35.10^{-1}$
10	5	$2,45.10^{-4}$	$5,01.10^{-4}$	$3,73.10^{-3}$
10	8	$5,70.10^{-6}$	$1,43.10^{-5}$	$3,36.10^{-5}$
15	2	$3,61.10^{-2}$	$3,83.10^{-2}$	$1,91.10^{-1}$
15	5	$3,08.10^{-5}$	$4,14.10^{-5}$	$1,61.10^{-4}$
15	8	$3,53.10^{-8}$	$3,65.10^{-8}$	$1,37.10^{-7}$

TAB. 3 – Erreurs dues à l'utilisation des fonctions APS

En conclusion, on constate que l'interpolant APS vérifie effectivement les propriétés annoncées :

- il est très proche de l'interpolant affine sur les basses fréquences $[0, f_{max}]$ avec une erreur ε_t^1 ;
- il est très proche de 0 sur les hautes fréquences $[f_s, f_c]$ avec une erreur ε_t^2 ;
- il est à support limité en temps de largeur $2p_t\Delta t$.

Cas test Nous allons nous placer dans une configuration simple pour réaliser une première série de tests sur l'algorithme présenté. On prend deux sphères rigides de rayon 1 mètre maillées avec 72 triangles et 38 sommets chacune. La configuration est tracée sur la figure 27. L'une est centrée sur l'origine, ce sera la sphère source (dessinée en bleu). L'autre est centrée sur le point de coordonnées $x = y = z = 6,6$ et ce sera la sphère réceptrice (en vert). Chacune de ces deux sphères est placée dans une boîte d'arête 2,2 m, l'ensemble étant contenu dans une boîte quatre fois plus grande d'arête 8,8 m. On se retrouve ainsi dans la configuration la plus simple pour l'algorithme multipôle : une initialisation, un transfert, une intégration. Nous allons étudier en détail ces trois phases dans le cadre de ce cas test simple.

Sur la source, tous les degrés de liberté sont nuls, sauf celui porté par le sommet de coordonnées (1,0,0) qui vaut 1 uniquement à la date t_0 . L'arête moyenne mesure 0,619 m, elle donne la fréquence maximum propageable $f_{max} = 54,91$ Hz (avec 10 points par longueur d'onde). Le CFL vaut 0,5 soit un pas de temps $\Delta t = 9,1.10^{-4}$ et une fréquence de coupure $f_c = 10f_{max} = 549,1$ Hz. On choisit de prendre $p_t = 8$ et $\chi_s = 5$. Avec une fréquence de seuillage $f_s = \chi_s f_{max} = 274,55$ Hz, le nombre de pôles des fonctions de radiation vaut 28. La sphère unité est discrétisée avec une grille (θ_i, φ_j) comportant 29×58 directions (représentées en vert sur la figure 28). On a également isolé quatre directions préférentielles (en bleu) que

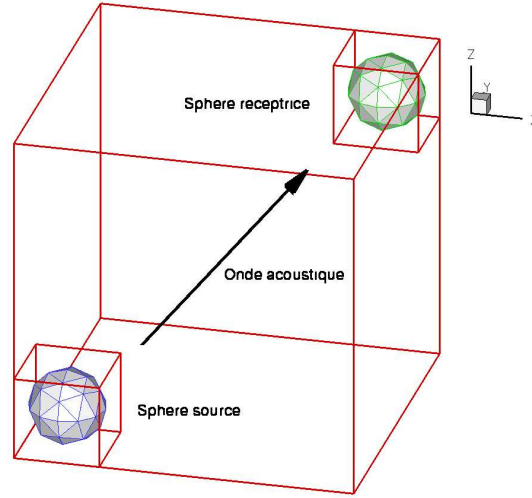


FIG. 27 – Cas test à deux sphères

l'on utilisera dans les paragraphes suivants pour illustrer notre propos. Dans le tableau 4 se trouvent les valeurs approchées des coordonnées de ces vecteurs dans la base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Direction	x	y	z	Axe le plus proche
1	-0.03	-0.18	-0.98	$-\vec{u}_z$
2	-0.51	0.75	-0.41	$+\vec{u}_y$
3	0.89	-0.20	0.41	$+\vec{u}_x$
4	-0.16	-0.10	0.98	$+\vec{u}_z$

TAB. 4 – Coordonnées des directions préférentielles

Initialisation Pour une cellule \mathcal{C} donnée, on doit calculer la fonction définie par :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\vec{s}, t) = \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} (\vec{n}_y \cdot \vec{s}) \Phi(y, t - \frac{\vec{s} \cdot y \vec{M}}{c}) dy \quad (33)$$

La fonction de potentiel $\Phi(y, t)$ est définie par la valeur des degrés de liberté contenus dans \mathcal{C} à la date t_n de notre calcul. Notons $n_{dl}^{\mathcal{C}}$ le nombre d'inconnues concernées, et $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n_{dl}^{\mathcal{C}}}$ leur valeurs à la date t_n . On note toujours $\varphi_j(x)$ les fonctions de base P_1 définies à la section 1.1.3.2, et $r(t)$ la fonction APS d'interpolation en temps de la section 2.7.5. La fonction Φ s'écrit :

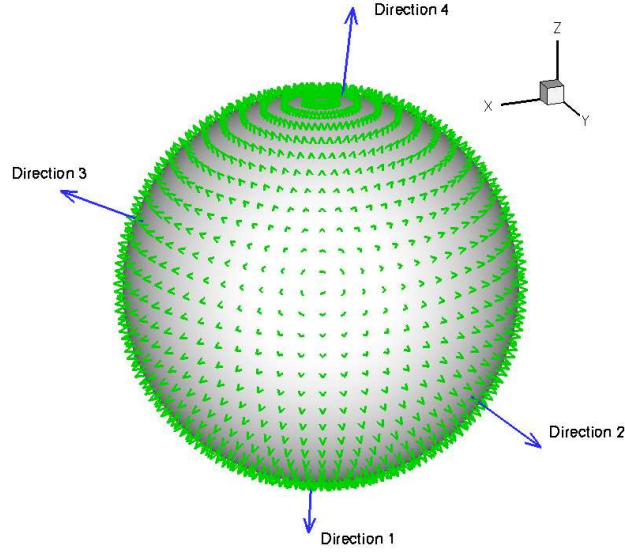


FIG. 28 – Maillage de la sphère unité

$$\Phi(y, t) = \sum_{j=1}^{n_{dl}^c} \lambda_j \varphi_j(y) r(t - t_n)$$

Par ailleurs, l'intégrale sur $\Gamma \cap \mathcal{C}$ va se faire par l'utilisation de points de Gauss G_k associés à des poids d'intégration p_k (pris homogènes à des surfaces, c'est-à-dire ayant déjà été multipliés par l'aire du triangle contenant G_k). On note n_{ptG}^c le nombre de points de Gauss utilisés. Ainsi, la fonction de radiation \mathcal{F}_C se calcule à partir de l'expression suivante :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \sum_{k=1}^{n_{ptG}^c} p_k n_{G_k} \vec{s} \cdot \sum_{j=1}^{n_{dl}^c} \lambda_j \varphi_j(G_k) r\left(t - \frac{\vec{s} \cdot G_k \vec{M}}{c} - t_n\right)$$

On fait ce calcul en deux étapes : tout d'abord on évalue la fonction vectorielle définie aux points de Gauss G_k par :

$$\vec{h}(G_k) = p_k n_{G_k} \sum_{j=1}^{n_{dl}^c} \lambda_j \varphi_j(G_k)$$

Puis on utilise \vec{h} pour obtenir \mathcal{F}_C :

$$\mathcal{F}_C(\vec{s}, t) = \left[\sum_{k=1}^{n_{ptG}^c} r\left(t - \frac{\vec{s} \cdot G_k \vec{M}}{c} - t_n\right) \vec{h}(G_k) \right] \cdot \vec{s} \quad (34)$$

On peut également utiliser \vec{h} pour obtenir la transformée de Fourier de \mathcal{F}_C :

$$\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, \omega) = \left[\sum_{k=1}^{n_{ptG}^c} \hat{r}(\omega) e^{-i \frac{\vec{s} \cdot G_k \vec{M}}{c} \omega} \vec{h}(G_k) \right] \cdot \vec{s} \quad (35)$$

Il apparaît donc trois manière de calculer la fonction de radiation :

- soit directement en temporel avec la formule (34) ;
- soit en fréquentiel avec la formule (35) suivie d'une FFT inverse ;
- soit en fréquentiel – comme ci-dessus – mais en imposant la nullité de $\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, \omega)$ pour $\omega > \omega_s$ (car on sait que $\hat{r}(\omega)$ vérifie cette propriété).

Dans le cas des deux sphères de la figure 27, le rayon de la boîte en nombre de $c\Delta t$ vaut $r_t = 7$. $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ comporte donc au plus $2(p_t + r_t) - 1 = 29$ échantillons non-nuls (de $-14\Delta t$ à $+14\Delta t$). Sur la figure 29(a), on a tracé la valeur de $\mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$ en fonction du temps t pour chacune des quatre directions préférentielles \vec{s} . La source étant quasiment ponctuelle, on retrouve 4 fois la forme de la fonction APS (figure 24).

Les différences d'amplitude s'expliquent par le terme $\vec{n}_y \cdot \vec{s}$ de l'équation (33). Vu la position de la source, \vec{n}_y est dirigé selon l'axe (Ox) , et le produit scalaire $\vec{n}_y \cdot \vec{s}$ est :

- faible dans les directions 1 et 4 (d'où les faibles amplitudes de ces courbes) ;
- négatif dans la direction 2 (d'où le renversement de la courbe) ;
- positif et proche de 1 dans la direction 3 (d'où la forte amplitude).

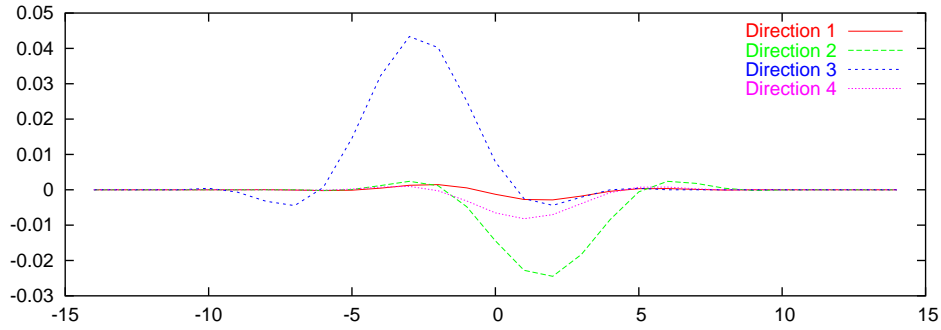
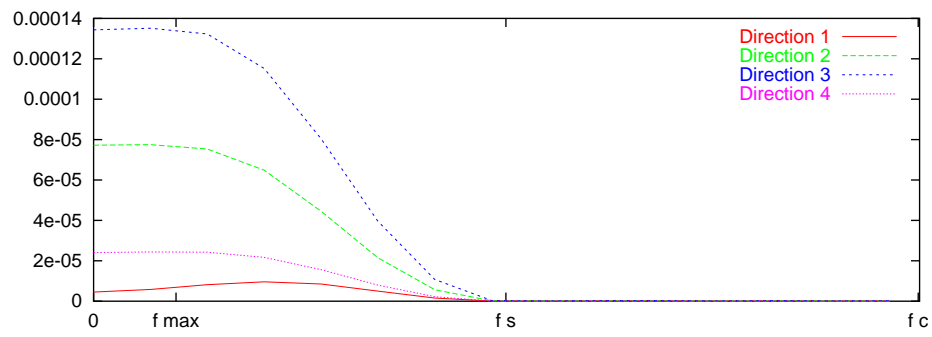
Les déphasages proviennent du terme $\vec{s} \cdot y \vec{M}$. Dans le cas particulier d'une sphère, $y \vec{M}$ est colinéaire et opposé à la normale, donc on doit observer un déphasage :

- faible dans les directions 1 et 4 ;
- positif dans la direction 2 (retard) ;
- négatif dans la direction 3 (avance).

L'analyse est bien sûr simplifiée par le fait que la source est réduite au support d'une seule fonction de base. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Sur la figure 29(b), on a tracé le module de la transformée de Fourier de cette fonction de radiation dans les 4 directions d'études. On retrouve bien sûr le profil spectral de la fonction APS (figure 25) qui s'annule à partir de la fréquence de seuillage f_s .

En outre, concernant les 3 manières de calculer \mathcal{F}_C , on constate que l'écart entre les différentes approches est très faible (les courbes sont graphiquement indissociables). Le choix se fera donc d'une part en fonction de la rapidité d'exécution, d'autre part en fonction des étapes suivantes du calcul (aura-t-on plutôt besoin de \mathcal{F}_C dans le domaine temporel ou fréquentiel?).

(a) Dans le domaine temporel (abscisse mesurée en Δt)

(b) Dans le domaine fréquentiel

FIG. 29 – Valeur de \mathcal{F}_C et $\hat{\mathcal{F}}_C$ dans les 4 directions préférentielles

Terminons par deux remarques concernant les performances : d'une part, dans la formule (34), les appels répétés à la fonction APS $r(t)$ définie par (23) ralentissent le calcul. Il sera souhaitable d'approximer $r(t)$ par une fonction affine par morceaux avec un nombre de points d'interpolation par Δt à définir. D'autre part, dans la formule (35), l'exponentielle complexe $e^{-i\frac{\vec{s} \cdot \vec{G}_k M}{c}\omega}$ rappelle évidemment celle observée dans la FMM (au signe près toutefois). ω prenant pour valeur une suite linéaire $0, 2\pi/T, 4\pi/T, 6\pi/T, \dots$ (où T est la longueur du signal en temps) la suite des exponentielles est géométrique. Elles peuvent donc se déduire des termes précédents par simple multiplication (ce qui coûte toujours moins cher à calculer sur un ordinateur qu'une exponentielle).

Fonction de transfert L'étape de transfert consiste à faire la convolution par la fonction

$$T_{M\vec{M}'}(\vec{s}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\left(t - \frac{\vec{s} \cdot M\vec{M}'}{c}\right)$$

ce qui revient à faire deux dérivées et un déphasage d'un temps $\vec{s} \cdot M\vec{M}'/c$ qui – pour notre application – vaut environ :

- Direction 1 : $t_1 = -25,5\Delta t$
- Direction 2 : $t_2 = -3,6\Delta t$
- Direction 3 : $t_3 = 23,6\Delta t$
- Direction 4 : $t_4 = 15,5\Delta t$

Après restriction aux harmoniques sphériques de rang $\leq L$, $T_{M\vec{M}'}$ est approchée par la fonction :

$$T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t) = \begin{cases} \frac{c}{MM'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{l=0}^L (l+1/2) P_l\left(\frac{ct}{MM'}\right) P_l\left(\cos(\vec{s}, M\vec{M}')\right) & \text{si } |t| < \frac{MM'}{c} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le cas des 2 sphères, la longueur du transfert est $|MM'| = 6,6 \times \sqrt{3} = 11,43$ m soit environ $d_t = 37\Delta t$. La fonction de transfert comporte donc $2d_t - 1 = 73$ échantillons non-nuls (de $-36\Delta t$ à $+36\Delta t$). On a tracé cette fonction (sans les dérivées) en fonction du temps dans les 4 directions préférentielles de notre étude sur la figure 30. Les quatre valeurs t_1, t_2, t_3, t_4 y sont également mentionnées en abscisse. On voit que la troncature de la série au rang L a pour effet d'approcher le dirac $\delta(t - t_i)$ par une fonction oscillante dont la masse se concentre en t_i .

L'étude de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel est intéressante (figure 31). On travaille ici toujours avec la fonction de transfert sans ses dérivées. On est ici dans le cas d'une fonction qui n'est pas à bande limitée en fréquence. Du coup, comme souligné à la section 2.7.2, la transformée de Fourier discrète du signal en temps échantillonné $T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t_k)$ (figure 31(a)) ne donne pas le spectre de $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, \omega)$ (figure 31(b)). Les fréquences extérieures à $[-f_c, f_c]$ viennent polluer le résultat, ce qui explique la différence entre les deux courbes.

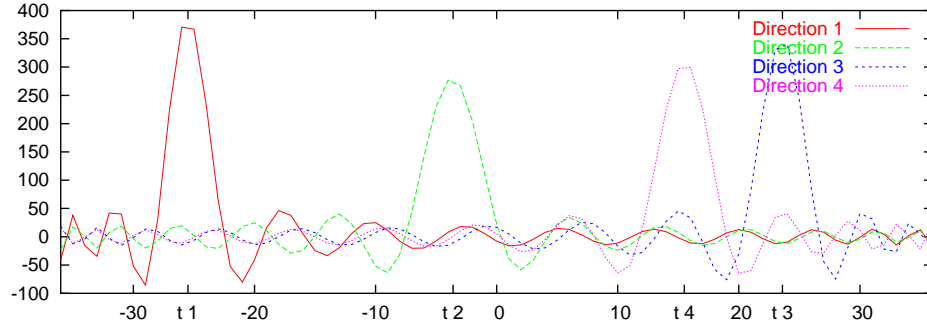


FIG. 30 – Valeur de $T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t)$ dans les 4 directions préférentielles en fonction du temps.

Réalisation du transfert On calcule ensuite la fonction de radiation $\mathcal{G}_{C'}$ obtenue par le produit de convolution :

$$\mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t) = T_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, t) * \mathcal{F}_C(\vec{s}, t)$$

La méthode la plus simple pour réaliser ce calcul est de rester dans le domaine temporel. On obtient les courbes de la figure 32. Avec une fonction source à $2(p_t + r_t) - 1 = 29$ échantillons non-nuls, et une fonction de transfert à $2d_t - 1 = 73$ échantillons non-nuls, $\mathcal{G}_{C'}$ aura au plus $2(p_t + r_t + d_t) - 3 = 101$ échantillons non-nuls (de $-50\Delta t$ à $+50\Delta t$).

La convolution par la fonction de transfert (sans ses dérivées) revient à translater la fonction en temps. On devrait donc observer le même module pour les transformées de Fourier $\hat{\mathcal{F}}_C$ et $\hat{\mathcal{G}}_{C'}$. En pratique, $T_{M\vec{M}'}^L$ étant approché par $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L$, la ressemblance a surtout lieu pour les basses fréquences, où $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L$ est proche de 1 (cf. figure 31(b)) comme on le voit sur la figure 33.

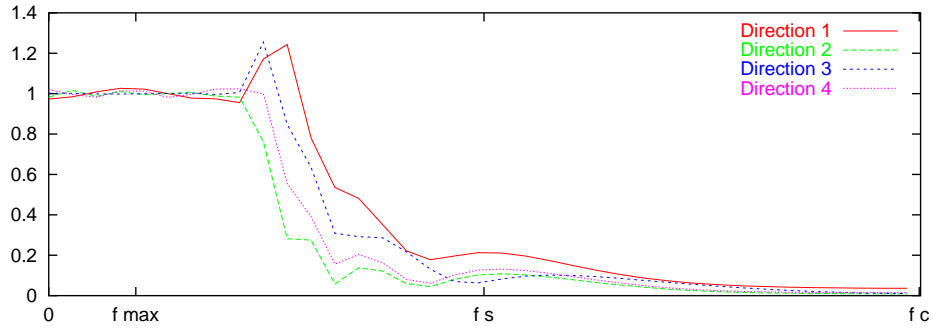
On peut aussi faire cette convolution dans le domaine fréquentiel. Pour cela, il faut

- étendre avec des zéros $\hat{\mathcal{F}}_C(\vec{s}, t)$ au nombre d'échantillons de $\mathcal{G}_{C'}$;
- faire une transformée de Fourier discrète ;
- multiplier terme à terme par $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, \omega)$
- faire une transformée de Fourier inverse pour revenir dans le domaine temporel.

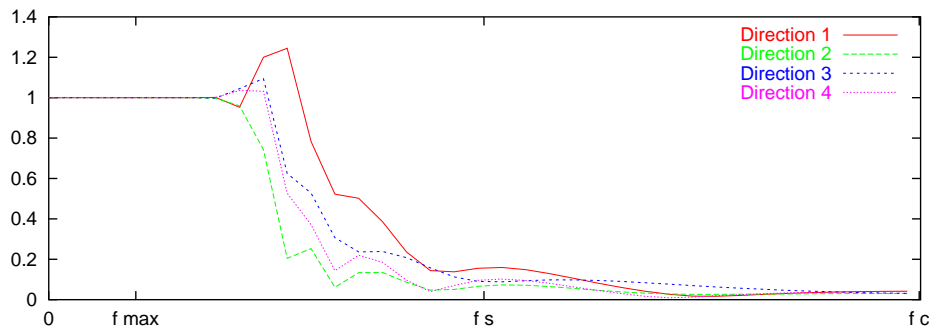
Par cette approche, on obtient des résultats graphiquement identiques aux précédents. Elle permet toutefois d'appliquer simplement la dérivée seconde en temps, puisqu'il suffit d'intégrer un coefficient $(i\omega)^2$ à la fonction de transfert fréquentielle $\hat{T}_{M\vec{M}'}^L(\vec{s}, \omega)$.

Intégration L'étape d'intégration consiste à calculer

$$\Lambda_i^m = -\frac{1}{8\pi^2 c^2} \int_{t \in \mathbb{R}} \int_{x \in \Gamma \cap C'} \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} -\vec{n}_x \cdot \vec{s} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M} \vec{x}}{c}) \right] \varphi_i(x) \chi_m(t) \, dx dt d\vec{s}$$

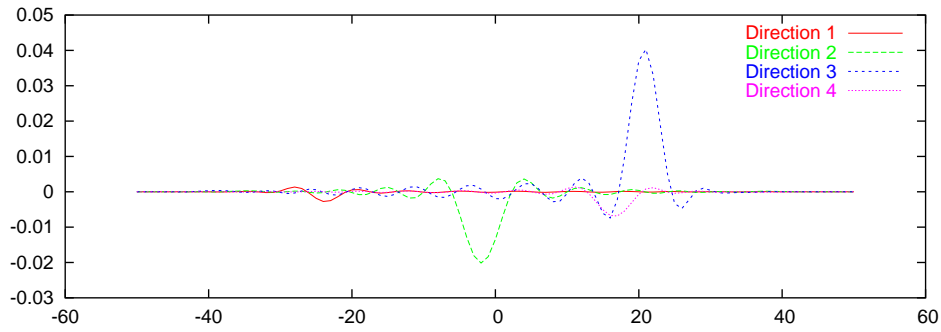
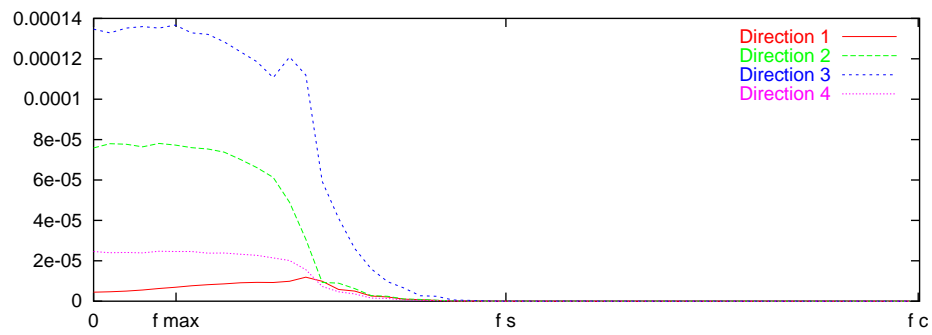


(a) Méthode incorrecte : par FFT de l'échantillonnage de $T_{M\tilde{M}'}^L(\vec{s}, t_k)$



(b) Méthode correcte : par calcul direct de $\hat{T}_{M\tilde{M}'}^L(\vec{s}, \omega)$

FIG. 31 – Calcul de $\hat{T}_{M\tilde{M}'}^L(\vec{s}, \omega)$ dans les 4 directions préférentielles selon deux méthodes

(a) Dans le domaine temporel (abscisse mesurée en Δt)

(b) Dans le domaine fréquentiel

FIG. 32 – Valeur de $\mathcal{G}_{C'}$ et $\hat{\mathcal{G}}_{C'}$ dans les 4 directions préférentielles

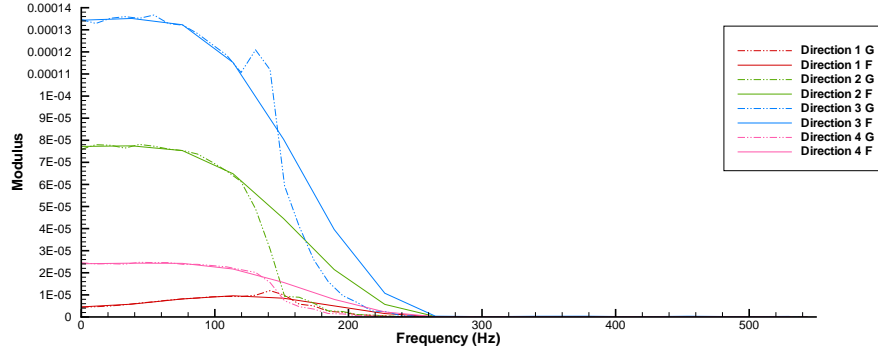


FIG. 33 – Comparaison de $\hat{\mathcal{F}}_C$ et $\hat{\mathcal{G}}_{C'}$ dans le domaine fréquentiel.

où i est l'indice d'un degré de liberté contenu dans la cellule \mathcal{C}' , et m est l'indice d'un pas de temps (postérieur au temps présent dans le cas d'un solveur pas-à-pas en temps, quelconque sinon). La valeur de cette intégrale se rajoute à la i -ème coordonnées du vecteur L^m correspondant à la date t_m .

L'intégrale sur \mathcal{S} est discrétisée comme présenté à la section 2.6. L'intégrale sur Γ est calculé à l'aide de points de Gauss G_k de poids p_k . On fait le calcul en deux étapes. Tout d'abord, pour chaque point de Gauss $G_k \in \Gamma$, on calcule la fonction vectorielle $\vec{g}(G_k, t)$ définie par :

$$\vec{g}(G_k, t) = \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{C'}(\vec{s}, t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{M}' G_k}{c}) \vec{s} d\vec{s}$$

Puis on calcule :

$$\Lambda_i^m = \frac{1}{8\pi^2 c^2} \sum_{k=1}^{n_{ptG}^{C'}} \vec{n}_{G_k} p_k \varphi_i(G_k) [\vec{g}(G_k, t_m) - \vec{g}(G_k, t_{m-1})]$$

On note toujours $R_{C'}$ le rayon de \mathcal{C}' et r_t le plus petit entier strictement supérieur à $R_{C'}/c\Delta t$. On sait que l'échantillonnage de $\mathcal{G}_{C'}$ comporte au plus $2(p_t + r_t + d_t) - 3$ échantillons non nuls pour les dates comprises entre $-(p_t + r_t + d_t - 2)\Delta t$ et $+(p_t + r_t + d_t - 2)\Delta t$. Pour calculer $\vec{g}(G_k, t)$, on interpole $\mathcal{G}_{C'}$ de manière affine par morceaux ou via une fonction APS suivant la précision requise. Dans le premier cas, cette interpolation étant nulle pour $|t| > (p_t + r_t + d_t - 1)\Delta t$, la fonction $\vec{g}(G_k, t)$ est pour sa part nulle pour $|t| > (p_t + r_t + d_t - 1)\Delta t + R_{C'}/c$. Sachant que $R_{C'}/c < r_t \Delta t$, on en déduit que $\vec{g}(G_k, t)$ est nulle pour $|t| \geq (p_t + 2r_t + d_t - 1)\Delta t$.

Au final, l'échantillonnage de $\vec{g}(G_k, t)$ comporte au plus $2(p_t + 2r_t + d_t) - 3$ échantillons non nuls (soit $2r_t$ de plus que $\mathcal{G}_{C'}$). On peut toutefois donner une formule plus simple pour

cette quantité : en effet, si on reprend les trois étapes de l'algorithme, on peut écrire $\vec{g}(x, t)$ sous la forme :

$$\vec{g}(x, t) = \int_{\vec{s} \in \mathcal{S}} \int_{y \in \Gamma \cap \mathcal{C}} (\vec{n}_y \cdot \vec{s}) \Phi(y, t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{y} \vec{x}}{c}) \vec{s} dy d\vec{s}$$

Si on note D_t le diamètre de l'objet Γ en nombre de $c\Delta t$, on en déduit que le nombre d'échantillons non nuls de $\vec{g}(x, t)$ ne dépasse pas $2(p_t + D_t) - 1$.

Comparaison des résultats Sur la figure 34, on compare les valeurs des degrés de liberté numéro 0, 10, 20 et 30 sur la sphère réceptrice à l'issue du produit de convolution. Sur la figure 34(a), on fait ce calcul en faisant rayonner la fonction source chapeau (notée $\gamma_n(t)$ et tracée sur la figure 1) via la méthode classique utilisant les matrices creuses A^n . Sur la figure 34(b), on utilise la même méthode pour faire rayonner la fonction source APS. Enfin, sur la figure 34(c), on montre les valeurs obtenues par la méthode multipôle. Le calcul de la figure 34(b) est donc un cas hybride utilisant la « nouvelle » fonction source associée au produit de convolution « classique » dont le but est de voir si les éventuelles différences proviennent du changement de fonction source ou du nouveau produit multipôle.

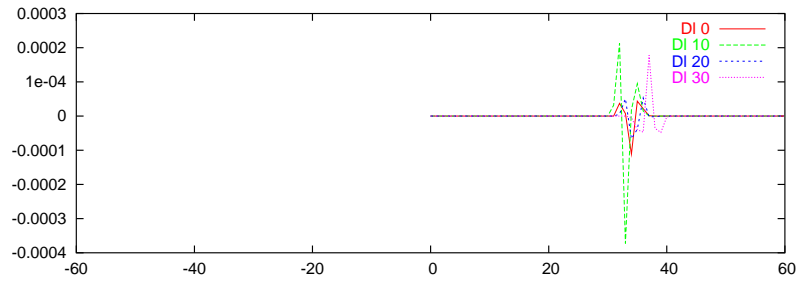
Ces graphiques appellent plusieurs remarques :

- Tout d'abord, et contrairement aux calculs classiques, le calcul multipôle montre deux impulsions, dont l'une pour des temps négatifs (alors que la source émet à $t = 0$). On voit parfaitement ici l'effet du signal fantôme, qui est le symétrique du signal réel par rapport à la date de l'évènement source. On le supprime tout simplement en ne prenant pas en compte les valeurs issues du calcul multipôle pour des dates qui précèdent la source.
- Ensuite, on constate que les figures 34(b) et (c) sont identiques si on supprime le signal fantôme.
- Enfin, on voit dans le domaine temporel de fortes différences entre la figure 34(a) utilisant la source chapeau et les deux autres résultats. Mais il faut se souvenir que la fonction APS a été conçue pour coïncider avec la fonction chapeau uniquement sur l'intervalle de fréquence $[0, f_{max}]$. On a donc tracé les transformées de Fourier des courbes 34 sur la figure 35.

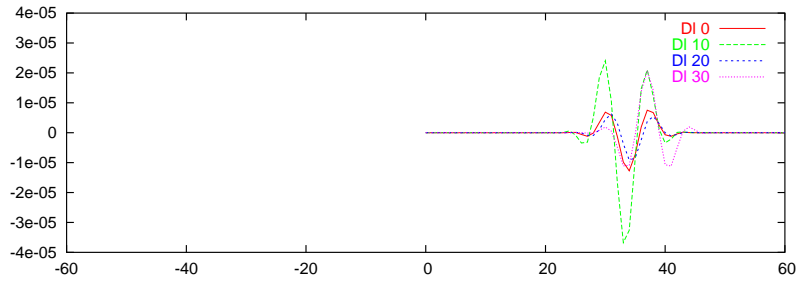
Si on regarde le spectre complet $[0, f_c]$, on voit à nouveau une forte ressemblance entre 35(b) et 35(c), et une courbe 35(a) très différente. Par contre, si on trace uniquement la portion $[0, f_{max}]$ comme sur la figure 36, on obtient bien des résultats identiques. Il faut donc retenir de cette étude que les résultats obtenus coïncident dans le domaine spectral sur l'intervalle des fréquences propageables par le maillage $[0, f_{max}]$. Par contre ils diffèrent sur le reste du spectre ainsi que dans le domaine temporel.

Sur la figure 37(a), on a tracé l'écart relatif entre la méthode classique et l'approche multipôle en fonction de la fréquence. On obtient une erreur d'environ 5% aux fréquences proche de 0, erreur qui descend en dessous de 1 % à proximité de f_{max} . Cette erreur peut sembler importante, mais il faut souligner que :

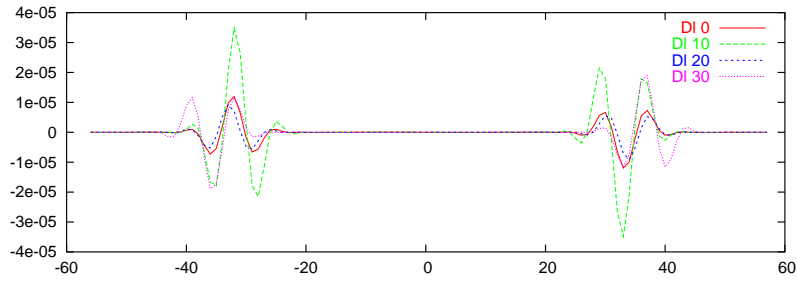
- l'erreur la plus forte est obtenue sur les fréquences où le spectre est le plus faible ;



(a) Méthode classique et source chapeau

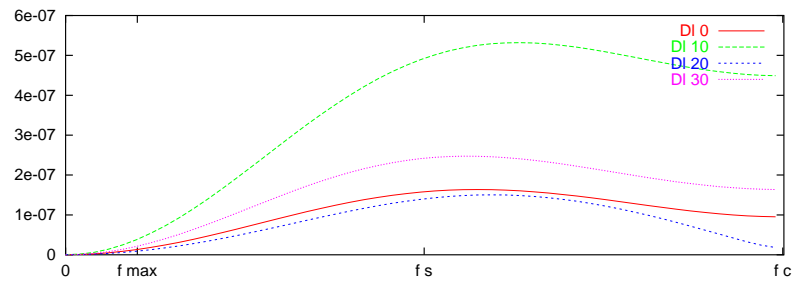


(b) Méthode classique et source APS

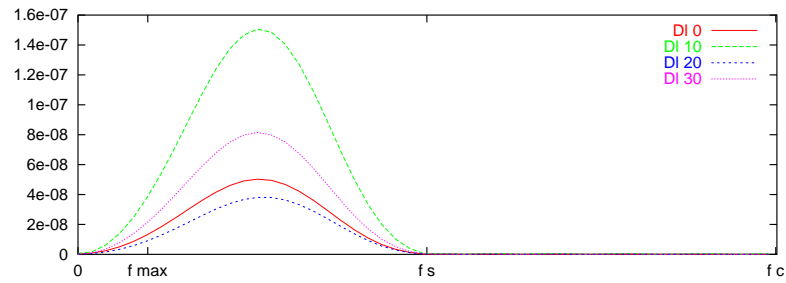


(c) Méthode multipôle temporelle (à gauche, le signal fantôme)

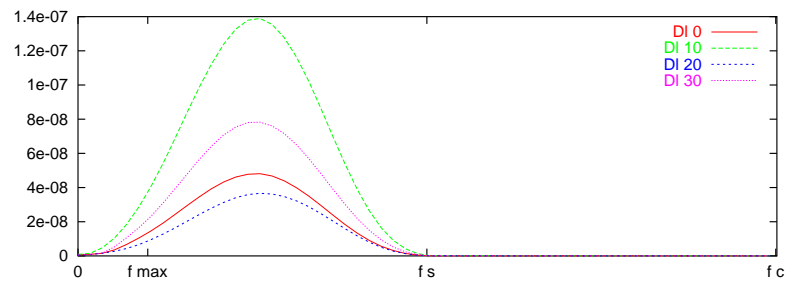
FIG. 34 – Valeur des inconnues 0, 10, 20 et 30 à l'issue du calcul dans le domaine temporel



(a) Méthode classique et source chapeau

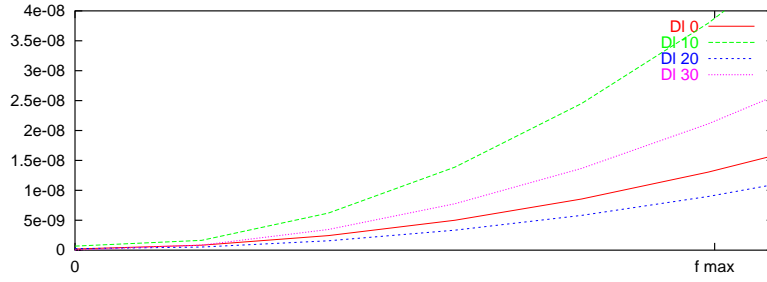


(b) Méthode classique et source APS

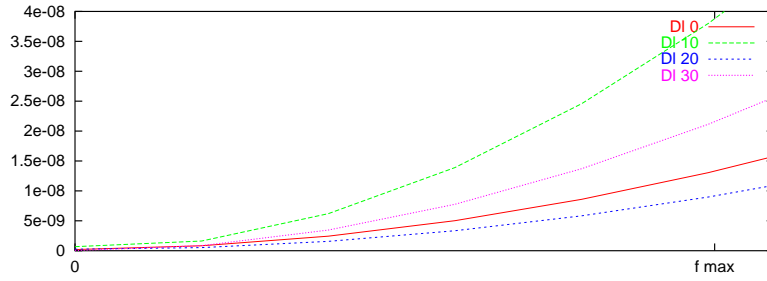


(c) Méthode multipôle temporelle (après éviction du signal fantôme)

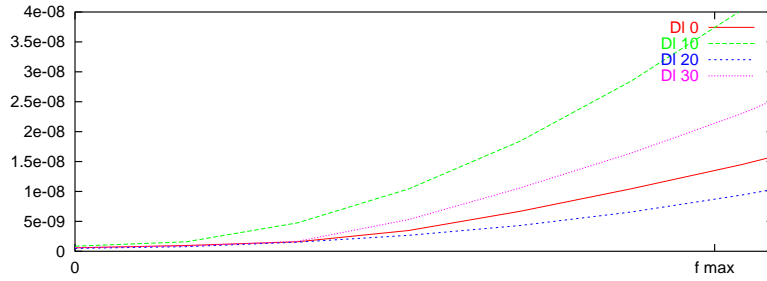
FIG. 35 – Valeur des inconnues 0, 10, 20 et 30 à l'issue du calcul dans le domaine fréquentiel



(a) Méthode classique et source chapeau



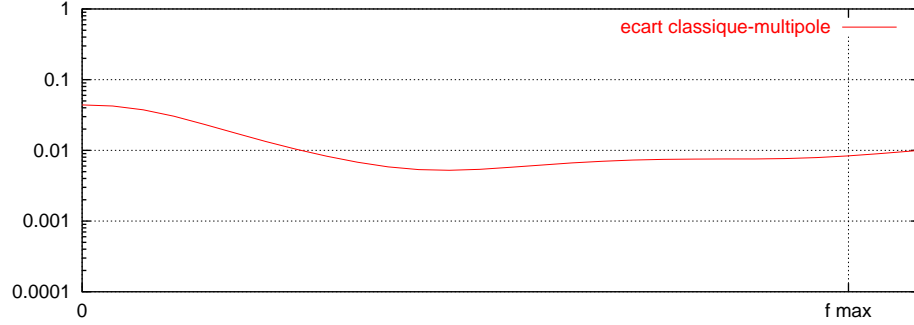
(b) Méthode classique et source APS



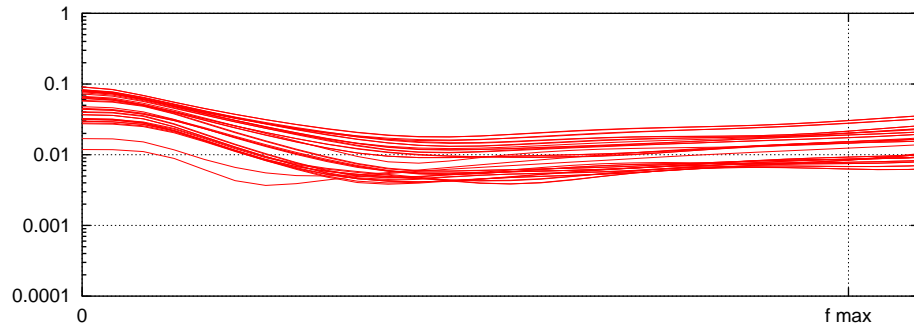
(c) Méthode multipôle temporelle

FIG. 36 – Valeur des inconnues 0, 10, 20 et 30 à l'issue du calcul dans le domaine fréquentiel sur l'intervalle $[0, f_{max}]$

- Dans le cadre d'un solveur complet, cette erreur ne concerne que les interactions les plus lointaines qui sont aussi les plus faibles.
- Si le résultat sert à localiser des fréquences de résonance, il est alors visualisé en échelle logarithmique, et ces 5 pour-cents d'erreur représentent moins de 0,5 décibel d'écart, ce qui est insignifiant.
- Cette erreur pourra évoluer en jouant sur les paramètres p_t , χ_s , L .



(a) Pour la source portée par le degré de liberté 37



(b) Pour chacun des 38 dl sources

FIG. 37 – Écart relatif entre méthode classique et multipôle en fonction de la fréquence

Sur la figure 37(b), on a tracé à nouveau l'écart relatif entre les calculs classiques et multipôles en testant toutes les sources possibles (soit 38 possibilités). On voit que la précision du calcul n'est pas la même suivant la position de la source sur la sphère émettrice.

L'erreur maximale varie entre (environ) 1 et 10 pour-cents, et elle est toujours atteinte pour la fréquence nulle. Sur la figure 38, on a tracé cette erreur maximale sur la sphère source on fonction de la position du degré de liberté qui émet l'onde en direction de l'autre sphère. Sachant que la seconde sphère est centrée en $x = y = z = 6,6$ m, on constate que l'erreur la plus petite est obtenue lorsque la surface émettrice est perpendiculaire à la direction de propagation vers la seconde sphère. A contrario, l'erreur maximale est obtenue lorsque cette surface est tangente à la direction dans laquelle se trouve de la sphère réceptrice.

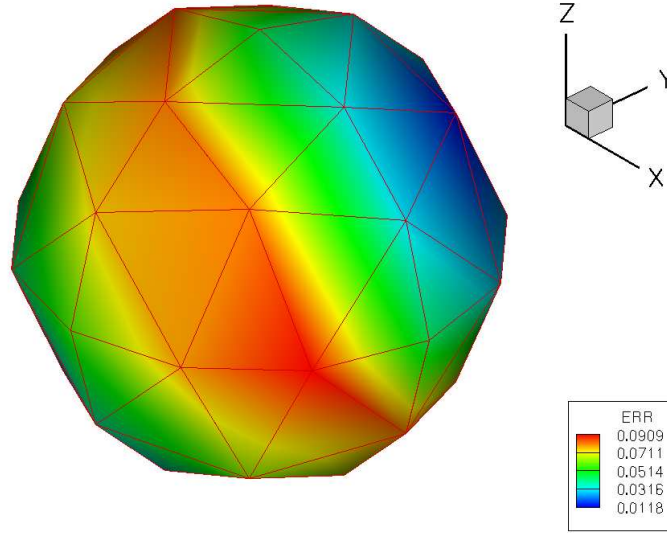


FIG. 38 – Erreur maximal du calcul en fonction de la position de la source sur la sphère émettrice

3.2 Validations préliminaires

Afin de valider notre implémentation de l'algorithme multipôle au sein du solveur pas à pas en temps standard, nous présentons ici quelques résultats préliminaires obtenus avec des paramètres de calcul (p_t , χ_s , ...) non encore optimisés. Le but ici n'est pas de valider intégralement le code mais simplement de montrer que l'on est sur la bonne voie.

Nous utilisons une sphère de rayon 1 mètre maillée avec 648 triangles et 326 sommets. L'arête moyenne mesure 21,4 cm ce qui donne une fréquence maximum propageable d'environ 160 Hz (avec 10 points par longueur d'ondes). Cette sphère est illuminée par une onde plane avec un profil de dérivée de gaussienne transportant une fréquence maximale de 170 Hz. Le coefficient CFL (égal au rapport $c\Delta t/\Delta x$ où Δt est le pas de temps et Δx l'arête moyenne)

est pris égal à 0,5 et la simulation dure 1000 pas de temps (ce qui représente plus de 50 fois la durée nécessaire au signal pour traverser l'objet). A l'issue du calcul, on passe les potentiels surfaciques obtenus dans le domaine fréquentiel en ne gardant que les fréquences inférieures à 170 Hertz (il y en a 53). On compare alors les résultats des trois codes d'éléments finis surfaciques suivants :

Tempo Le code temporel classique (pris comme référence) post-traité par une FFT inverse ;

TMM Le code multipôle temporel, également post-traité par une FFT inverse ;

Freq Le code fréquentiel utilisant un solveur direct et lancé en tout 52 fois, une fois par fréquence étudiée à part la fréquence nulle.

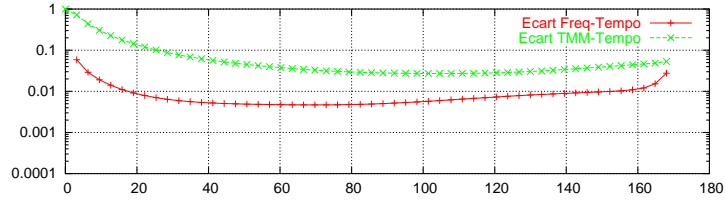
Sur les figures 39, on trace les écarts relatifs entre les potentiels surfaciques de référence et les deux autres résultats, en fonction de la fréquence. On fait cette étude sur quatre cas :

- Une sphère rigide (à 326 inconnues) ;
- Trois sphères entièrement impédantes (à 974 inconnues) avec une impédance égale à 1, 10^2 ou 10^{-2} .

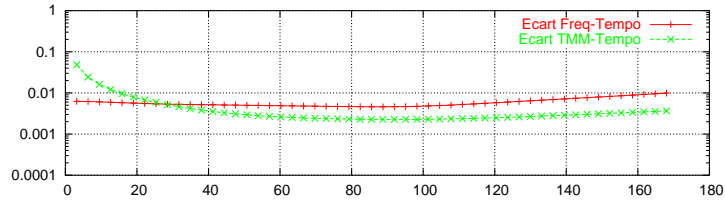
Les codes temporels classiques et fréquentiels sont tous les deux déjà validés. On montre l'écart entre leurs résultats afin de voir quel est l'écart admissible entre deux méthodes numériques différentes pour un même problème physique et sur un même maillage. Cela nous donne la marge d'erreur acceptable sur ce maillage en $\lambda/10$.

Sur les cas rigides et à impédance 1 et 100, on constate que l'écart entre le code multipôle et le code de référence est inférieur à 1 pour-cent à partir de 20 Hz, et qu'il est même inférieur à l'écart fréquentiel-temporel au delà de 50 Hz. A proximité de la fréquence nulle, nos résultats sont nettement moins bons. Ceci dit, c'est une zone où le signal source (une dérivée de Gaussienne) est plus faible, donc l'impact sur le résultat final est moindre. Le pic autour de 115 Hz est observé à la fois en temporel multipôle et en fréquentiel. Un tracé en champs proches ou lointains nous renseignerait davantage sur l'explication de cette anomalie. Néanmoins, on ne considère pas cela comme une erreur car la même chose est observée avec la méthode fréquentielle utilisant un solveur direct (i.e. non multipôle). Enfin, le cas avec impédance à 0,01 est environ 10 fois moins précis (inférieur à 10 % à partir de 20 Hz) sans que l'on puisse à ce stade de notre étude donner une raison à cela.

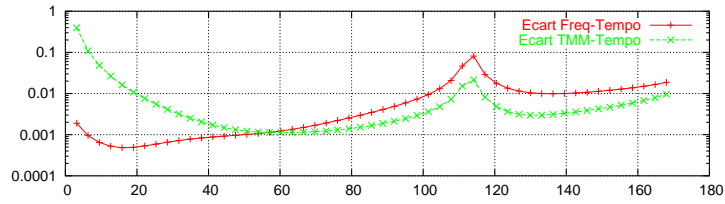
Ces résultats sont globalement satisfaisants, et appellent quelques remarques. Tout d'abord, le fait d'observer directement les potentiels surfaciques est beaucoup plus pénalisant du point de vue de l'erreur observée que si on avait regardé des champs proches ou lointains. En effet, les compensations entre éléments voisins par le biais de l'intégration conduiraient à des écarts beaucoup plus faibles. Deuxième remarque, la petite taille du cas traité (environ $20c\Delta t$ de diamètre) force à prendre des boîtes plus petites que sur des cas plus grands ($8c\Delta t$ d'arête au lieu de $16c\Delta t$ en général) ce qui conduit à traiter moins d'interaction en proche et donc augmente l'erreur finale. Enfin, soulignons que le code multipôle est, sur ce cas test, beaucoup plus lent que le code temporel classique (d'un facteur 30 sur le cas rigide, et 5 sur les trois cas impédants).



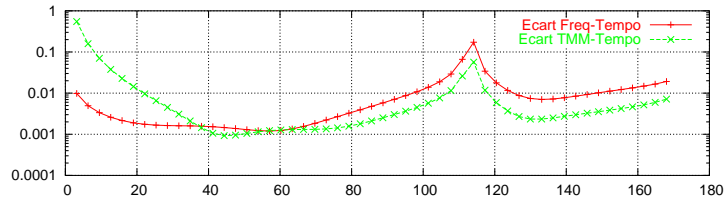
(a) Pour la sphère d'impédance 0.01



(b) Pour la sphère d'impédance 1



(c) Pour la sphère d'impédance 100



(d) Pour la sphère rigide

FIG. 39 – Écart relatif entre le code temporel (noté **Tempo**), pris comme référence, et les codes temporels multipôle (noté **TMM**) et fréquentiels (noté **Freq**) en fonction de la fréquence sur chacune des 4 sphères

3.3 Perspectives

Au même titre que la méthode multipôle fréquentielle, le but de cet algorithme est de diminuer les temps de résolution pour des problèmes de grande taille. En fréquentiel, sur des problèmes à un seul second membre, un solveur itératif utilisant une FMM optimisée devient rentable (par rapport à un solveur itératif classique) à partir de quelques milliers d'inconnues [16]. En temporel, le seuil est difficile à évaluer a priori, surtout à ce stade du développement de l'algorithme. Néanmoins, un avantage net de l'algorithme multipôle est que l'assemblage des matrices se restreindra aux interactions proches. Sur le cas Cetaf à 1797 inconnues de la section 1.2, l'assemblage complet des matrices dure déjà 2,2 heures sur un PC 2 GHz. Avec une croissance en $\mathcal{O}(n^2)$, cet assemblage pour un cas à 100.000 inconnues nécessiterait presque 10 mois de calcul ! La matrice des interactions proches voit son coût croître en $\mathcal{O}(n)$ (à taille de feuille constante). Outre ce gain immédiat sur les temps d'assemblages, il y a également de nombreuses pistes à explorer pour augmenter les performances du code.

Rayonnement multiple Nous nous sommes concentré dans ce chapitre sur le calcul du rayonnement d'un seul vecteur A^n correspondant à une seule date t_n (comme expliqué à la section 2.1). Si les boîtes sont de taille suffisante, on peut envisager de faire rayonner une fonction $\Phi(x,t)$ définie par la donnée de plusieurs pas de temps consécutif $A^n, A^{n+1}, \dots, A^{n+p}$ et dont le support serait $[t_n - p_t \Delta t, t_{n+p} + p_t \Delta t]$.

Intégration pas à pas La méthode multipôle a pour but de calculer le rayonnement d'une fonction source $\Phi(x,t)$ sur la structure pour tous les pas de temps postérieurs à cette source. Dans le cadre plus spécifique d'un solveur pas à pas en temps, on aura intérêt dans le produit multipôle à n'intégrer nos fonctions (via l'équation (2.9.3)) que pour le prochain pas de temps (celui qui s'apprête à être inversé), et à préserver le reste des fonctions de radiation \mathcal{G}_C pour les produits suivants.

Méthode multi-niveau en espace L'aspect multi-niveau en espace serait une reprise des idées introduites dans le cas fréquentiel : en utilisant un découpage récursif de l'objet *via* un octree, on répartit le calcul des transferts entre les différents niveaux de l'arbre. Les niveaux les plus fins servent aux transferts les plus courts. La seule nouveauté ici serait la dimension temporelle des fonctions de radiation.

Méthode multi-niveau en temps L'aspect multi-niveau en temps serait au contraire une réelle nouveauté par rapport à la FMM fréquentielle. Dans cette dernière, on travaille dans un espace à 3 dimensions (x,y,z) et on construit un arbre en procédant à un découpage récursif de cet espace. En temporel, on manipule 4 dimensions (x,y,z,t) , et l'arbre est bâti par découpage récursif des quatre dimensions. Ainsi chaque cellule correspond à une certains portions de l'espace $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}] \times [t_{min}, t_{max}]$. Une cellule peut avoir jusqu'à 16 fils, dont 8 pour les dates $t \in [t_{min}, (t_{min} + t_{max})/2]$ et 8 pour $t \in [(t_{min} + t_{max})/2, t_{max}]$.

Conclusion

Nous avons présenté en théorie et en pratique la méthode multipôle temporelle mise en œuvre au sein d'un code de résolution des équations de l'acoustique par la technique des potentiels retardés. Nous avons mis à plat les équations correspondantes en essayant de rester proches de ce qui existe déjà en fréquentiel. Les premiers tests réalisés sont très satisfaisants puisqu'ils montrent que l'on préserve à la fois la précision et la stabilité de la méthode. En revanche, à ce stade de notre développement et sur les petits cas traités, les temps de calcul ne sont pas encore améliorés par rapport à la méthode usuelle.

De nombreuses voies restent à explorer autour de cette méthode. Au niveau théorique, l'application de la méthode multipôle temporelle aux calculs de champs proches, lointains, et aux cas d'acoustique non-rigide et d'électromagnétisme permettra d'élargir les champs de son utilisation. Du point de vue algorithmique, les aspects multi-niveaux devraient apporter une accélération appréciable au même titre que l'optimisation des différents opérateurs (initialisation, transfert, intégration, ...) et des nombreux paramètres (p_t , χ_s , C_ε , rayon des feuilles, ...).

Références

- [1] O. Bucci and G. Franceschetti. On the spatial bandwidth of scattered fields. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 35(12):1445–1455, december 1987.
- [2] Ronald Coifman, Vladimir Rokhlin, and Stephen Wandzura. The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3):7–12, 1993.
- [3] Eric Darve. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. PhD thesis, Université Paris 6, juin 1999.
- [4] A. A. Ergin, B. Shanker, and E. Michielssen. Fast analysis of transient acoustic wave scattering from rigid bodies using the multilevel plane wave time domain algorithm. *J. Acous. Soc. Am.*, 107(3), March 2000.
- [5] M. Frigo and S. G. Johnson. The fastest fourier transform in the west. Technical Report MIT-LCS-TR-728, MIT, september 1997.
- [6] Claude Gasquet and Patrick Witomski. *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Masson, 1990.
- [7] T. Ha-Duong, B. Ludwig, and I. Terrasse. A Galerkin BEM for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(13):1845–1882, 2003.
- [8] Stephen P. Huestis. Interpolation formulas for oversampled band-limited functions. *SIAM Rev.*, 34(3):477–481, 1992.
- [9] John J. Knab. Interpolation of band-limited functions using the approximate prolate series. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25(6):717–720, 1979.
- [10] Virginie LANGE. *Équations intégrales espace-temps pour les équations de Maxwell. Calcul du champ diffracté par un obstacle dissipatif*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 1995.
- [11] J. C. Nédélec. Ondes acoustiques et électromagnétiques; équations intégrales. Technical report, Cours DEA, École Polytechnique, Paris, 1996.
- [12] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992. The art of scientific computing.
- [13] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygun, and E. Michielssen. Papers - analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(7):1064–1074, 2000.
- [14] B. Shanker, A. A. Ergin, M. Lu, and E. Michielssen. Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time domain algorithm. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(3):628–641, 2003.
- [15] B. Shanker, A. A. Ergin, and E. Michielssen. A multilevel plane wave time domain algorithm for the fast analysis of transient scattering phenomena. In *Proceedings of IEEE antennas propagat. Soc. Symp.*, volume 2, pages 1342–1345, Orlando, FL, July 11-16 1999.

- [16] G. Sylvand. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juin 2002.
- [17] Isabelle TERRASSE. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de potentiels retardés*. PhD thesis, École Polytechnique, 1993.

Table des matières

Introduction	3
1 Théorie	3
1.1 Modélisation mathématique et numérique	3
1.1.1 Problème	3
1.1.2 Formulation faible	5
1.1.3 Discrétisation	6
1.1.4 Cas d'un objet rigide	8
1.1.5 Cas Général	12
1.2 Exemple d'applications	12
2 Présentation de la méthode multipôle temporelle	17
2.1 Principe de base	17
2.2 Simplification des termes matriciels	18
2.3 Décomposition du noyau	19
2.4 Découpage en domaine	22
2.5 Interaction entre deux sous-domaines	22
2.6 Discrétisation de la sphère unité	24
2.7 Découpage en temps	25
2.7.1 Rappels sur l'échantillonnage	25
2.7.2 Transformée de Fourier discrète	27
2.7.3 Convolution	28
2.7.4 Applications à l'acoustique temporelle	29
2.7.5 Troncature en temps	30
2.7.6 Synthèse	34
2.8 Calcul des opérateurs	34
2.8.1 Initialisation	34
2.8.2 Transfert	35
2.8.3 Intégration	39
2.9 Retour vers le problème initial	39
2.9.1 Suppression du signal fantôme	39
2.9.2 Résolution pas-à-pas en temps	41
2.9.3 Dérivées normales	41
3 Mise en œuvre	43
3.1 Premières expérimentations	43
3.2 Validations préliminaires	60
3.3 Perspectives	63
Conclusion	64



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399